目　录

总　论

白尚恕　沈康身　李　迪　李继闵

秦九韶是我国历史上杰出数学家之一，他的数学专著《数书九章》(原名《数术大略》)也广为学术界所知。为了使读者对秦九韶与其成就以及对后世的影响有所了解，这里略作介绍：

一、秦九韶事迹

秦九韶，字道古，一说生于公元1202年，一说生于公元1209年，死于1261年或以后，自称鲁郡人。其父秦季槱，与陈亮(1143—1194)同榜进士，后任四川巴州太守。1219年四川北部一带的宋军作乱，攻克巴州等地，秦季槱弃城逃走，带着全家到达南宋首都临安(今杭州市)。不久，秦季槱在南宋先后任工部郎中和秘书少监等官职。1225年被任命为四川潼川府知府。

秦九韶幼年随父在巴州，后到临安，他在《数书九章》自序中说："早岁侍亲中都"，就是他早岁随父母在临安一事。在临安期间，正是他努力学习的时候，他不但和朝廷的天文历法家、建筑师等人多所接触，并"尝从隐君子受数学"。从而学习到丰富的科学技术知识。

他又和著名词人李刘有来往，并同他学习骈俪诗词，成为知友。秦九韶通过这一阶段的学习成为一位有学问的青年，为以后的研究工作打下了坚实的基础。

秦九韶跟父亲回到四川，先在乡里为义兵首，后任某县县尉。李刘曾推荐他到南宋朝廷担任校对官，他未赴任，仍留四川。

1236年，蒙古军队南下四川，秦九韶开始东撤，曾在湖北等地做官，最后定居于湖州(今浙江吴兴)。1244年以通直郎为建康府(今江苏南京市)通判，当年冬由于他母亲去世，回湖州守孝。守孝期间，他主要从事数学研究，于1247年完成《数书九章》九卷。

由于秦氏在天文历算方面的成就，经人推荐到朝廷，并有奏稿。

约于1254年秦九韶被任命为建康沿江制置司参议，不久又离职家居。他和朝廷要员如贾似道(1213—1275)、吴潜(1196—1262)等人都有来往，尤其和吴的关系更为密切。1258年，他到扬州找贾似道，贾推荐给潭州(今湖南长沙市)李曾伯(1198—？)，李派他到琼州，为代理琼州守。由于郡人"厌其贪暴，作卒哭歌以快其去"，代理数月就被免职，李曾伯送给他大批东西带回到湖州。之后，他到鄞(今浙江宁波市)找吴潜，吴推荐他任司农寺丞，有人建议任命他知临江军(今江西南昌市)，因刘克庄(1187—1269)等人坚决反对，两次任命都未实现。可以说秦氏仕宦生涯，到此已经结束。

正在此时，南宋统治集团内部斗争激烈，1260年贾似道执掌实权，吴潜被流放到潮州。后清洗朝廷中与吴有关的人员，秦九韶受到一些牵连。但毕竟与贾也有关系，还是派他到梅州(今广东梅县)做地方官，后来死在那里。

这就是秦九韶的简单生平。他的一生十分复杂，首先他是学者，知识渊博，思想活跃。他"性极机巧，星象、音律、算术以至营造等事无不精究。还尝从李梅亭(即李刘)学骈俪诗词。游戏、毬、马、弓、剑，莫不能知"。根据这段记载，可见秦九韶从自然科学到社会科学，从技术到文学，从游戏到武术无不通晓，实为当时我国不可多得的通才、全才。从《数书九章》一书的内容来看，与上面的记载完全相符。该书的内容以数学为主，可是把数学用于天文历法、水利工程、建筑、测绘、田亩、军事、商业贸易、税收、气象、货币金融等方面。这些数学问题，从社会、商

业、技术、科学等各个角度反映了南宋后期的实际情况。他自己住宅的建筑也极讲究，是他本人所设计，并有建筑实践；家中又有各种乐器，本人精通乐律。事实充分说明，秦九韶不仅学识渊博，而且有实践精神。从学术上来看，秦九韶还有创新精神，敢于突破前人的束缚，《数书九章》的编排和内容就是一例。

其次，他进入仕途之后受到各种谴责和谩骂，甚至飞章不断上到朝廷，死后仍在叫骂。刘克庄说他“暴如虎狼，毒如蛇蝎”，周密(1232—1308)引用陈圣观的话说：“如(秦九韶)所不喜者必遭其毒手，其险可知也”，并举“己未透渡，秦喜色洋洋”，杨守斋到其家，“坚欲苛留，杨力辞之，遂荐汤一杯，皆如墨色，杨恐甚，不饮而归”以及其他等事例。这些说法的真实性有多大，是个应当深思的问题。我们认为有些说法是真实的，秦氏的人品可能不好，他贪财、暴虐、好色等等，但这是封建社会中大多数官员的通病，并非秦氏一人如此。实际上，秦九韶是一个很有才干的人，虽然没有关于政绩的记载，可是他被主张畜积人才的吴潜看中；晚年“在梅治政不辍”，都可以说明这一点。在某种程度上说，当时一些人对秦的叫骂有妒嫉成分在内，因而叫骂不免有失实或夸大之处，不能一概相信，要分析地对待。

最后，秦九韶的政治生涯没有顺利的时候，多是数月就被调动或免职，到处奔波，从未安定过。晚年时几次任命，都因遭到反对而撤消。

总之，他的学术研究没有得到应有的发展，政治才干也没有得到施展的机会。可以说是在不得志中了其一生。由于他在数学上的卓越成就，使他在中国乃至世界科学史上占一席之地。

二、《数书九章》内容概述

《数书九章》列算题八十一道，分为九类。有些是按题文所涉自然现象(如第三卷天时类)或社会现象(如第五卷赋役类)，有的是

按题文所及数学现象(如第一卷大衍类)分类。限于历史条件和认识水平，这样分类未尽人意，难免互有交叉。总的说《数书九章》能继承并发扬《九章算术》以来我国数学传统，内容丰富多采，出类拔萃，推陈出新，真是青出于蓝而胜于蓝。题文不只谈数学，还详及自然现象、社会生活。尤为我国历来数学专著所仅见。

《数书九章》在数学内容上颇多创新，能道前人所未道。中国数码字记数法在此得以完整保存。自然数、分数、小数、负数都有专条论述，无理数虽未列专论，但借助于求微数可以取其近似值到所需精度。最大公约数和最小公倍数灵活运用，《数书九章》继《九章算术》更相减损求等数方法，能进一步熟练。我国古代无素数概念，秦氏首创连环求等，借以求几个数的最小公倍数。在比例问题上《数书九章》又有深刻一层的认识，《九章算术》重今有术(连比例法)止于三对变量。《数书九章》设题达五对之多，层层变换，有条不紊，体现了刘徽对此预言“虽四五转不异也”。《数书九章》还模拟《九章算术》以漆、易油和漆题，衍为出谷、得米、易麦、踏曲、酝米题，题意源出盈不足而不落窠臼、另辟蹊径；改用重今有术解，真可谓推陈出新，立术新颖可喜。同余式方面的创造发明尤其是《数书九章》最大特色之一。在《孙子算经》物不

道路，同样可以有所发现和发明，异途同归，此公式即为一范例。中国和印度都有用三边表示的三角形面积公式，近来查明中印都在句股术上久有素养，家学渊源、其来有自。

在代数学方面《数书九章》“均货推本”题记有四元线性方程组，秦氏吃透《九章算术》方程术，将题设二十个数据列为“方程”①（首图），依次相乘直除，作算图十四幅，图旁详注变换因果关系，直至系数矩阵化为单位矩阵止（终图），按步就班，其精审无讹，一如今日大学生作业。《数书九章》也仅此一例有完整方程术演算实录，史料价值极高。显示早于高斯二千年我国已有这种消去法。在数值解多项式方程方面《数书九章》继贾宪增乘开方法（1050）进而作正负开方术，发明“投胎”、“换骨”诸术，允许多项式方程系数可以是负数。在扩（缩）根（进退系数数位）、在估根（用常数与一次项系数之比为准）、在减根（用综合除法）较贾宪原术有更为明确的记录，其“兴田求积”草文，是一典型。说明数值解方程至此已到炉火纯青的地步。比之五个世纪之后英国人霍纳的类似“新”方法，不仅在时间上优先而且也在质量上制胜。

数学内容而外，从《数书九章》还可以看到南宋时代社会经济、文化、生活、科学、技术等各种活动的一个侧面。《数书九章》题文所记大致是真实的。例如第三卷天时类从此可以窥测当时天文工作和气象工作；推算积年和降水仪器及其算法都是我国最早文献。从“推土计功”、“三斜求积”、“计地容民”、“围田先计”等题可见“民以食为天”。南宋偏安江南，官民争相扩大耕地，于此也推进了数学科学的发展。第十一卷钱谷类、第六卷赋役类、第九卷市物类记载了当时借贷关系、海外贸易、粮食互换、冶炼工艺、金银比价、运输派工许多社会现象。第十五卷军旅类述宋代用兵、步卒操练、兵器给养等，正可以补宋代兵法《武经总要》（1044）之不足；其第七卷测望类、第十三卷营建类所设问题尤饶兴味。土木

① “方程”，即今称矩阵。

工程施工之前最重测量，从测量九题可以见宋人对此学之精到，而营建九题广及筑城、垒台、建屋、造楼，浚河、壅坝、分土、铺地以至功限、考勤，题问图文并茂，兼及具体数据，大可以翼同代人李明仲《营造法式》(1103)。《数书九章》某些记载为建筑史提供可靠文献以补文物无徵，例如"表望浮图"记通天塔心柱，这种承重构件海内已无实物可考；《营造法式》虽为宋建筑百科全书，但造塔之制适付缺如。又"计定城筑"一题所说城墙造法，远详于《武经总要》及《营造法式》所说，对照今存宋城，其结构与之若合符节。

三、秦九韶的主要贡献及其在数学发展中的价值

秦九韶的《数书九章》是宋元数学代表作之一，它在许多重要数学分支领域内的杰出成就是前所未见的。

如所周知，中世纪数学的中心课题是寻求应用问题的一般解法。当时，对于有定问题最困难的堡垒是高次方程问题的解法，而对于不定问题的兴趣则集中在同余问题与不定方程整解求法方面。《数书九章》关于高次方程的数值解法和解一次同余问题的大衍总数术，正是中国传统数学在这两个方面所取得辉煌成就的出色总结。以此而论，可以毫无夸张地认为秦氏的著作标志着中世纪世界数学的最高水平。

中国传统数学以注重实用为基本特征，因而自始至终中算家的高次方程问题研究完全致力于它的数值解法，即开方术的探索。早在汉代的《九章算术》中已有了开平方术与开立方术的系统、完整的记述，并运用带从开平方法解二次方程应用问题。十一世纪，贾宪将刘益的正负开方术推广为一般高次方程问题数值解法。提出"增乘开方法"给出了开任何高次方的统一运算法则，它随乘随加，简便易行，并且还可以推广到求高次方程的正根上去。秦

九韶的《数书九章》集秦汉以来中算开方术之大成，它运用增乘开方法最终地解决了数字高次方程有理数根和无理数根的近似值计算问题，其所设计的演算程序，世称“秦九韶方法”。

西方数学关于高次方程求解问题是沿着符号代数的途径，以寻求解的公式为目标。这自然是在十五世纪代数符号被普遍采用以后才逐渐发展起来的。欧洲在十六世纪才有了三次方程的公式解，而方程论的研究主要在十八世纪。至于西欧数学家关于高次方程数值解法的探讨则始于十九世纪。1804年意大利数学家罗斐尼(Paolo Ruffini)创立了一种逐步近似法解决数字高次方程的无理数根的近似值问题，而在1819年英国的霍纳发表论文“连续近似解任何次数字方程的新方法”，才提出了与宋代增乘开方法演算步骤相同的算法，这比秦九韶要迟五、六百年。

中算家关于一次同余问题的研究源远流长。西汉历家推算上元积年便开始了这方面的探索。中国数理天文学的早期发达与历法的不断改革，使得治历演纪成为中国天算史上一个经常性的课题。

《数书九章》对大衍术的理论概括，无疑是秦九韶在数学史上的又一杰出贡献。在秦九韶的书中，处理一次同余问题的方法有二：其一是“大衍总数术”，其二是“治历演纪术”。前者是一次同余式组问题的一般解法，后者是专为历元推算设计的演算程序；二者皆基于“大衍求一术”。秦氏的大衍总数术将孙子剩余定理推广到模数两两并非互素的一般情形；而要将模数化为两两互素，这在中国古代传统数学不用素数概念的历史条件下是一个十分困难的问题。秦九韶所设计的化元数为定数的算法，相当成功地处理了这一难题。虽然秦氏的这一算法还未达到至善尽美的程度，但它比后世于近代提出的析素因子法在实际计算上确有其优越性。

毋庸讳言，西方关于一次同余问题的研究起步较晚。在欧洲，最早接触一次同余问题的是意大利数学家列奥纳多·斐波那契

(Leonardo · Fibonacci 约1170—1250)①。他在1202年写的《算盘之书》(Liber Abaci)是从阿拉伯文和希腊文材料编译成拉丁文的书。其中给出了两个一次同余问题，但没有一般的算法。直至十八、十九世纪才由大数学家欧拉(1743年)、高斯(1801年)各自重新获得与“孙子剩余定理”相同的结论，并就模数两两互素的情形做出严格的证明。

在一次同余问题的研究方面，无疑东方数学处于优先的地位。印度学者在一次不定分析方面也有过浓厚的兴趣。在公元六世纪至十二世纪间，印度数学家用一种类似于“求一术”的“库塔卡”算法来解决一次不定方程组问题，但这是在《孙子算经》之后，而且从未有过象秦九韶大衍术这样完整、系统的理论概括。因此，西方数学史家将这项数学发现称之为“中国剩余定理”是符合历史事实的。

《数书九章》的数学成就还表现在更多的方面。在代数学方面，除上述之外它还继承了《九章算术》的“方程术”，而在计算技术上又有所改进。在几何学方面，它对《九章算术》与《海岛算经》中的测望之术发扬光大，对勾股、重差之术多所阐发。特别值得一提的，是秦九韶的“三斜求积公式”，即由三角形不等三边(大斜、中斜、小斜)计算三角形面积的公式：

$$\text{面积}^2=\frac{1}{4}\left[\text{小}^2\cdot\text{大}^2-\left(\frac{\text{大}^2+\text{小}^2-\text{中}^2}{2}\right)^2\right],$$

它独立于西方的海伦(Heron，年代不可考②)公式而得来并与之等价。

综上所述，秦九韶的《数书九章》概括了宋元时期中国传统数学的主要成就。仅就高次方程数值解法与一次同余式组解法两项

---

① 列奥纳多，又名斐波那契，即“波那契的儿子”。

② 海伦的生活年代，数学史家聚讼纷纭，各家意见有几百年的出入。最早的估计为公元前三世纪，最迟是公元三世纪。

而论，已代表了中世纪世界数学发展的主流与最高水平。当然，这些成就是秦汉以来历代算家长期探索、不断创造与积累的结果，不能完全归功于秦氏个人的贡献。并且，由于书缺有间，若对秦氏在数学方面究竟有多少创见进行具体分析，则不无困难。但是，以《数书九章》在数学发展史上的学术水平而论，秦九韶作为宋元时代中算家的杰出代表是当之无愧的。在这一意义上，美国科学史家萨顿评估秦氏是“他那个民族、他那个时代、并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一”，也是不过分的。

四、《数书九章》对后世的影响以及近代对秦九韶的研究概况

《九章算术》和《数书九章》是两部中国古代数学巨著，也是中国古代数学的代表作。如果说秦汉时代的《九章算术》标志着中国古代数学理论体系的形成，而宋元时代的《数书九章》则是对《九章算术》的继承和发展，并标志着中国古代数学的顶峰。所以，这两部划时代的巨著，对后世中、外数学的发展具有十分深远的影响。

仅就《数书九章》而论，对后世的影响也复不小。明代永乐年间，辑录天下名书，于永乐六年(1408)编成，名《永乐大典》，凡22877卷，是我国第一部百科全书。书中辑录了秦九韶《数学九章》十八卷。

清代中期，开四库馆，从《永乐大典》中抄出《数书九章》。经过李锐(1773—1817)校订，收入《四库全书》。道光二十二年(1842)，郁松年将《数书九章》收入《宜稼堂丛书》中。从此，《数书九章》才在民间广为流传。

由于四库馆开馆，从《永乐大典》中抄录出一批中国古代数学著作，可以说是久佚而复得者，可喜可贵。因而激发了当时一些学者的兴趣，又由于当时考古之风盛行，于是形成挖掘、整理、

研究中国古算的潮流。尤其秦氏的正负开方术、大衍求一术是当时学者最感兴趣的课题，这些课题一直影响着中国数学的研究方向，直到清代末期犹余兴未尽。在当时，受秦氏的影响有不少著作问世。例如，焦循（1736—1820）《天元一释》（1800）、《开方通释》（1801），《大衍求一释》，分别阐发秦氏大衍术及正负开方术，并广为应用。李锐《日法朔余强弱考》（1799），解释何承天调日法，有所创见，乃是用求一术解一次不定问题的最早记载。张敦仁（1754—1834）《求一算术》（1803）、《开方补记》（1804），前者阐明大衍求一术，十分详尽，可以说张敦仁乃是秦氏大衍术之继承者；后者则论述了正负开方术不足之处。李锐《开方说》（1817），不仅是一部方程论著作，而且较详尽地论述了增乘开方法，还推广其应用，使之能求负根。骆腾凤（1770—1841）《开方释例》（1815）、《艺游录》（1843），分别对高次方程解法和一次不定方程解法提出自己看法。时日醇（十九世纪）《百鸡术衍》（1861）、《求一术指》（1873），前者改进了丁取忠以"二色差分"解百鸡问题的解法，后者改进了大衍求一术中求等约分术。黄宗宪（十九世纪）《求一术通解》（1871），在大衍求一术理论上虽无大创新，但在化元数为定数方法上以"析各泛母为极小数根（即分解模数为质因子）"简化秦氏方法，从而得到推崇。

以上所述各家著述，都是在秦氏《数书九章》直接或间接影响下完成的，凡此种种，可以说明秦氏对清代学者整研传统数学所起到的作用。

近现代以来对秦九韶及其《数书九章》的研究颇不乏人，论述质量也日益提高。其中值得提出的，计有1920年傅种孙（1898—1962）发表了《大衍术》，高均发表了《大衍术论》，对秦氏大衍求一术作了一般性论述；1921年钱宝琮（1892—1974）发表《求一术源流考》，由《孙子》物不知数题到黄宗宪《求一术通解》系统论述不定分析在我国发展概况后，并给出大衍求一术的三简法。1925年李俨（1892—1963）发表《大衍求一术之过去与未来》一文，全面

而系统论述大衍求一术在我国的演变概况，并论及大衍求一术在历法中的应用、对日本的影响以及在世界数学中的作用，这是当时对大衍求一术全面而深入的权威性论文。四十年代，严敦杰先后发表了《宋元算书与信用货币史料》、《宋元算书丛考》两文，其中重点介绍了秦氏的功绩。

六十年代以后，出版了《宋元数学史论文集》，其中论及秦九韶及其《数书九章》的研究论文有：钱宝琮《增乘开方法的历史发展》、钱宝琮《秦九韶〈数书九章〉研究》、钱宝琮《宋元时期数学与道学的关系》、严敦杰《宋金元历法中的数学知识》、白尚恕《秦九韶测望九问造术之探讨》。另外，此书之前还有一些论文，如李迪《"海伦公式"的历史》、程廷熙《秦九韶雨深雪厚例解的讨论》等。

看来，近现代我国学者对秦氏工作的研究可分为三阶段。第一阶段，是二十年代，当时数学史工作相当于开创阶段，研究人员较少，重点研究了秦氏大衍求一术。第二阶段，是六十年代，专业研究人员有所增多，并成立了研究机构，对秦氏工作开展了较全面的研究。八十年代可算作是第三阶段，国内专业队伍得到空前壮大，对数学史开展较深入、较全面的研究。国外学术界对中国数学史研究也给予极大的关注，尤其比利时李倍始（U.Libbrecht）于1973年在美国出版了《十三世纪中国数学——秦九韶的〈数书九章〉》，引起国际学术界对秦九韶研究的兴趣，同时也波及国内，因而形成对秦氏工作研究的高潮。前此发表的有关论文计有：李文林、袁向东《中国剩余定理》，沈康身《更相减损术源流》，李文林、袁向东《中国古代不定分析若干问题探讨》等多篇。

秦九韶年谱初稿

严　敦　杰

宋嘉泰二年壬戌(1202)，一岁。

秦九韶字道古，蜀普州安岳人。父季槱字宏父，母□氏。

按九韶《宋史》无传，生卒年原无考，兹以嘉定十二年(1219)年十八岁逆推，应生于是年。

宋周密《癸辛杂识》言九韶秦凤间人，按清钱大昕《十驾斋养新录》卷八曰："王象之云：自绍兴十四年分利州为东西路，乾道四年复合为一，淳熙二年复分，三年复合，五年复分，绍熙五年复合，庆元二年复分，嘉定三年复合，嘉定十一年复分，今复合矣。初绍兴十四年以秦凤路阶、成、西、和、凤属利西路，与文、龙共七州，后又益以天水军为八州，以沔州为帅府。以兴元、利、阆、隆庆、巴、蓬、金、洋、大安九州军为利东路，以兴元为帅府。此其大略也。"(王象之《舆地纪胜》二百卷，嘉定辛巳自序，宝庆丁亥李埴序。)秦凤路属于利州西路，秦季槱曾官太守的巴州属于利州东路。又《舆地广记》卷三十二利州路有剑州属梓潼县即九韶随父守郡之潼川。又普州安岳县属梓州路与利州西路相邻。周密泛称以为秦乃利州路人而又误为利州西路转以为秦凤路且不能肯定故言秦凤间也。

秦九韶《数书九章》自序题鲁郡人。因秦的始姓有在鲁，宋郑樵《通志》三十六氏族略二："鲁又有秦氏居于秦邑，今濮州范县北有秦亭是其地。"又"秦者其有出于鲁者，以邑为氏。"用鲁郡为秦，犹如用天水为赵，琅琊为王等相同。

○《宋史·律历志》："嘉泰二年，五月甲辰朔，日有食之，

统天历先天，乃罢杨忠辅。"按杨忠辅史料以此年为最迟。楼钥(1137—1213)《攻媿集》卷三十四有'秉义郎杨忠辅换太史局丞权同知算造'一文。忠辅字德之，河南人。造统天历为元郭守敬授时历所本。又丁易东与杨忠辅约略同时，丁易东《大衍索隐》卷一："未几得河南杨氏大衍本原"。《大衍索隐》有纵横图，疑杨氏书亦有是项图录，其后杨辉所论纵横图，知有渊源焉。

《数书九章》天时类，推气治历题称："太史测验天道，庆元四年戊午岁冬至三十九日九十二刻四十五分。"按统天历庆元五年施用庆元五年之天正冬至即庆元四年冬至日。以统天历步之，是年冬至大余三十九，小余一万一千一百二十九，万万平小余为九十二刻七十四分一十六秒六十六小分。开禧历是年冬至为三十九日九十八刻七十六分九十二秒三十小分。清毛岳生(1791—1841)日："授时历议云：统天历，庆元五年己未杨忠辅造，行八年至开禧丁卯先天六刻。道古此问戊午岁冬至日分，较开禧历所推适先六刻，盖由当时实测如此。"(《数书九章札记》卷二）原题之九十二刻四十五分，九韶当据太史局实录，此云太史即杨忠辅也。

○是年李治(1192—1279)十一岁。

开禧三年丁卯(1207)，六岁。

○是年鲍澣之造开禧历，附统天历颁行。开禧历上元甲子至开禧三年丁卯积七百八十四万八千一百八十三算，日法一万六千九百，岁率六百一十七万二千六百八，朔率四十九万九千六十七。

按秦九韶《数书九章》"治历推闰"、"治历演纪"、"揆日究微"诸题均引开禧历。

宋陈振孙《直斋书录解题》卷十二："开禧历，大理评事鲍澣之撰进，时开禧三年诏附统天历推算，至今颁历用统天历之名，实用此历。当时缘金人闰月与本朝不同，故于此历加五刻，天道有常，而造术以就之，非也。大抵中兴以来，虽屡改历，而日官浅陋，不知历象之本，但模袭前历，而于气朔皆一时迁就尔。"按此

为秦九韶对开禧历之评语，见下淳祐九年条。所谓'至今'应在淳祐十年之前。

嘉定四年辛未(1211)，十岁。

〇是年春鲍澣之等又修嘉定历，成，日法用三万五千四百，未颁行①。(《宋史·律历志》)

嘉定五年壬申(1212)，十一岁。

〇是年七月鲍澣之在杭州七宝山三茅宁寿观中录得《数术记遗》，为之序。

《数术记遗》鲍序："余官中都，丐外得请暇日，因至七宝山三茅宁寿观阅道藏中书目，乃见有《数术记遗》者，亟恳道士启其函而快读之。"

宋李心传《建炎以来朝野杂记》(嘉泰二年自序)甲集卷一："宁寿观，在七宝山之山，旧名三茅堂，有徽宗御画茅真君像。绍兴二十年赐额，观后林内下瞰大内之宫中楼殿，皆仿佛可见。今为禁地。"

万历修《钱塘县志》(万历三十七年聂心汤自序)："纪胜，山水，杭城西枕湖，南北二山，绕湖三面，……迤山西上为七宝山。〔上有三茅观、汪王庙。〕又纪制，观，三茅观，在七宝山之巅，宋称宁寿观。"

嘉定六年癸酉(1213)，十二岁。

〇是年十一月鲍澣之跋《周髀算经》，题"承议郎权知汀州军州兼管内劝农事主管坑冶括苍鲍澣之仲祺谨书。"按《数术记遗》序题"奉议郎守大理正新差知汀州鲍澣之谨书。"《永乐大典》卷7893，汀，汀州府，郡县官题名引《临汀志》："郡守题名：鲍澣之，嘉定六年十月十七日以朝奉郎知。八年五月十六日除刑部郎官，八月二十一日离任。"鲍澣之留意传刻《算经十书》，十余年如一日，从庆元庚申(1200)刻《九章算术》起至汀州刻《数术记遗》、《周髀算

① 予另有"补修宋嘉定四年历并释"一稿，未刊。

经》止，十二、三年始终不渝，故明程大位《算法统宗》'算经源流'条言《算经十书》又刻于汀州学校也。

嘉定九年丙子(1216)，十五岁。

〇是年七月李心传自序《建炎以来朝野杂记》乙集二十卷。李书引有何承天调日法。乙集卷五总论应天至统天十四历云："宋何承天考正日晷，知南至之端；又用强弱率以配日，立法以求朔策之余分，乃合简易之要。……钦天作于王朴，施于周世宗时，而朴昧乎前人简易之要，求之不合。运于朔分之下横立小分而谓之秒，说者谓前代诸历，朔余未有秒者，若朔余可以用秒，则可随意加减，何待求日法以齐朔分也。建隆二年始命王处讷造应天历，处讷乃用一万二分为日法，得强率二百有一，得弱率九，以二十六乘强率，以九乘弱率，并二者得五千三百七为朔策之余，则强弱适中，合简易之要，自然无秒。"三言"简易之要"。知何承天调日法当时颇为流行，故秦九韶《数书九章》'治历演纪'题为之采用也。

《宋史·律历志》："裴伯寿上书言：新历朔余，孝荣减其分，乃增立秒，不入历格。前古至于宋诸历，朔余并皆无秒。"此云历格，即调日法。又按何承天调日法，始见于宋周琮明天历。

嘉定十二年己卯(1219)，十八岁。

是年蜀乱，秦季槱守巴州，失陷。九韶于乡里为义兵首。

《宋史》卷四十宁宗纪："嘉定十二年三月乙亥，兴元军士权兴等作乱，犯巴州，守臣秦季槱弃城去。"

周密《癸辛杂识》："秦九韶……年十八在乡里为义兵首。"清焦循(1763—1820)考证："为义兵首不知在何年，其年运遂无可考。"兹按应在本年，由是知九韶生于嘉泰二年壬戌(1202)。

宋魏了翁(1178—1237)《鹤山先生大全文集》卷四十三，潼川转运司重建东衙记："嘉定十有二年夏，兴元卒张福、莫简叛，灰利撇阆，抄果践遂。"又卷五十七，潼川府新城铭："嘉定十二年春，眉山李侯，被命守潼。夏四月庚午，兴元禁旅为乱，扰利、阆，

擒果、遂，将窥潼川。”此次士兵暴动尚见于正史记载，其详见《宋史》卷四十宁宗纪及卷四百三十张威传。

嘉定十七年甲申(1224)，二十三岁。

《数书九章》自序：“早岁侍亲中都，因得访习于太史，又尝从隐君子受数学。”

‘亲’指父亲秦季槱，‘中都’指杭州。秦季槱于是年在杭州任秘书少监。

《南宋馆阁续录》卷七：“少监，嘉定以后二十人。……秦季槱字宏父，普州安岳人，绍熙四年(1193)陈亮榜同进士出身，治春秋，十七年九月除。”

宝庆元年乙酉(1225)，二十四岁。

是年六月秦季槱知潼川府，九韶随侍。

《南宋馆阁续录》卷九：“秦季槱，宝庆元年正月，以秘书少监兼国史院编修官、实录院检讨官。六月除直显谟阁知潼川府。”

《癸辛杂识》：“(九韶)尝随其父守郡。”按秦季槱知潼川府事见于当时诗文集者有：

(一)魏了翁《鹤山先生大全文集》卷四‘送秦秘监季槱以显谟知潼川七月十日’诗。

(二)洪咨夔《平斋集》卷五‘送秦秘监还蜀’诗。

(三)李曾伯《可斋杂稿》卷十四‘代回潼川秦守贺生日’文。

宝庆二年丙戌(1226)，二十五岁。

秦九韶仍随父在潼川。正月曾赴涪州观赏石鱼。

涪州石鱼题名：“宝庆二年正月郡守李瑀公玉，新潼川守秦季槱宏父，季槱之子九韶道古同来游。”(《八琼室金石补正》卷八十三。)《八琼室金石补正》卷八十三：“李公玉等再题名，〔方二尺九寸，前列四字，字径七寸许，后七行，行十一字，字径寸余，并正书。〕瑞鳞古迹。郡守李瑀公玉，新潼川守秦季槱宏父，郡纠曹椽何昌宗季文，季槱之子九韶道古，瑀之子泽民志可同来游。石鱼闰八年不出，今方瞭然，大为丰年之祥，此不可不书。

宝庆二年正月十二日。涪州太守。”(见“涪州石鱼文字所见录”，归安姚觐元、海昌钱保塘同撰。咫进斋抄稿本，归安姚氏藏，钱保塘据原拓校。)

绍定元年戊子(1228)，二十七岁。

〇是年杨云翼卒(1170——1228)。杨云翼撰有《句股机要》、《象数杂说》藏于家。

绍定三年庚寅(1230)，二十九岁。

《数书九章》卷三‘推气治历’题有“绍定三年庚寅岁冬至三十二日九十四刻一十二分。” 按统天历推三十二日九十二刻九十九分。开禧历推三十三日空刻九十二分。都与秦九韶所算不同。

绍定四年辛卯(1231)，三十岁。

〇是年郭守敬生。

绍定六年癸巳(1233)，三十二岁。

是年九韶曾官县尉，从李刘学骈俪诗词。《中兴以来绝妙词选》卷八：“李公甫名刘，号梅亭。”

《癸辛杂识》：“迩尝从李梅亭学骈俪诗词。”

李刘《梅亭四六标准》卷三十六‘回秦县尉谢差校正九韶’：“善继人志，当为黄素之校雠；肯从吾游，小试丹铅之点勘。”按李刘曾差校正书籍，有云：“小材出位，愿归朱墨之勾稽；大府量能，留备丹铅之点勘。”(《梅亭四六标准》卷十一‘谢卫参政泾差校正书籍’。)故称肯从吾游也。

钱大昕《十驾斋养新录》：“李梅亭尝为成都漕，九韶差校正，当在其时。其任何县尉，则无可考矣。”

按李刘官成都漕在是年。《梅亭四六标准》卷十五‘贺郑参政清之除右相兼枢使进光禄大夫成都运司作。’《宋史》卷四百一十四郑清之传：“绍定六年，弥远卒，命清之为右丞相兼枢密史。”又卷十六‘贺陈签书贵谊除参政兼同知成都运司作。’《宋史》卷四百一十九陈贵谊传：“为礼部尚书兼给事中端明殿学士签书枢密院事，绍定六年冬，上始亲政，进参知政事。”又卷十七‘贺洪郎中咨夔除察

院成都运司作'。又'贺王寺簿遂除察院成都运司作'。《宋史》卷四十四理宗纪："绍定六年，十一月戊辰，礼部郎中洪咨夔进对：命咨夔洎王遂同为监察御史。"又卷八'除成都漕谢李制置'。按李制置为李𡌴，《宋史》卷四十四理宗纪："绍定四年十月戊寅，以李𡌴为焕章阁直学士四川制置使。"李𡌴至嘉熙元年(1237)进宣抚使由杨恢继任制置使。又卷八'除成都漕到任谢史丞相'。史弥远卒于绍定六年十月乙未。由是知李刘官成都漕在绍定六年，至如九韶任何县尉则确无可考矣。

端平元年甲午(1234)，三十三岁。

是年金亡。

端平二年乙未(1235)，三十四岁。

○是年王恂生。

嘉熙元年丁酉(1237)，三十六岁。

《数书九章》自序："际时狄患，历岁遥塞，不自意全于矢石间，尝险罹忧，荏苒十禩。"以淳祐七年上推十年，应在是年。狄患谓元兵攻蜀也。

按是年潼川已失守，见《宋史》卷四十二理宗纪。

嘉熙四年庚子(1240)，三十九岁。

《续文献通考》卷七钱币考："嘉熙四年九月令措置十八界会子收换十六界，将十七界以五准十八界一券行用。"《数书九章》钱谷类'算回运费'题有十七界会子，'课籴贵贱'题有十七界官会，'折解轻赍'题又有以五约旧会为新会，盖均据时事言之。又'折解轻赍'题云："旧会每贯五十四文足。"以五乘之得新会十八界每贯二百七十文足。《宋史·食货志》言咸淳四年十八界每道作二百五十七文足，则又贬值矣。

淳祐三年癸卯(1243)，四十二岁。

○是年耶律楚材(1190—1243)卒。耶律楚材撰有西征庚午元历。

淳祐四年甲辰(1244)，四十三岁。

是年八月，九韶以通直郎通判建康府，十一月丁母忧解官离任。

《景定建康志》卷二十四，官守志一通判厅，“东厅题名：秦九韶，通直郎淳祐四年八月到任，十一月丁母忧解官离任。”

淳祐七年丁未(1247)，四十六岁。

是年九韶自序《数书九章》十八卷。

自序：“窃尝设为问答，以拟于用，积多而惜其弃，因取八十一题，厘为九类，立术具草，间以图发之，或可备博学多识君子之余观。”九类：大衍第一，天时第二，田域第三，测望第四，赋役第五，钱谷第六，营建第七，军旅第八，市易第九。

宋陈振孙《直斋书录解题》卷十二作《数术大略》九卷，言“此书本名数术，而前二卷大衍、天时二类于治历测天为详。”《癸辛杂识》作《数学大略》，明赵琦美跋(万历丙辰，1616)称：“此书原阁钞本，会稽王云来应遴录得，予借录一过，册原名数书，九章二字乃王添入。”清宋景昌《数书九章札记》卷一：“四库馆本数书作数学。案赵琦美记云册元止名数书，九章二字乃王应遴添入。今馆本系《永乐大典》钞出，已有九章二字，则九章之名不始于应遴也。又《大典》本谓之数学，则数书二字亦非原名。”按《文渊阁书目》卷十四作“《数学九章》一部三册，完全。”

秦九韶曰：“独大衍法不载九章，未有能推之者，历家演法颇用之，以为方程者误也。”

《宋史·律历志》周琮明天历：“以方程约而齐之，今须积岁七十一万一千七百六十一，则经朔大小余与今有之数偕闰余而相会。”又鲍浣之评统天历“无复强弱之法，虚废方程之旧。”按此两方程实即秦之大衍术。秦又曰：“今人相乘演积年，其术如调日法，求朔余、朔率，立斗分、岁余，求气骨、朔骨、闰骨及衍等数、约率、因率、蕃率，求入元岁、岁闰、入闰、元率、元闰，已上皆同此术。但其所以求朔积年之术，乃以闰骨减入闰，余谓之闰盈，却与闰缩、朔率，列号甲、乙、丙、丁四位，除乘消减，

谓之方程。乃求得元数，以乘元率，所得谓之朔积年，加入元岁共为演纪岁积年。所谓方程，正是大衍术，今人少知。数理精微，不易窥识，穷年致志，感于梦寐，幸而得之，谨不敢隐。"(《数书九章》卷三'治历演纪'题。)

淳祐八年戊申(1248)，四十七岁。

是年九韶以历学荐于朝，得对，有奏稿及所述《数学大略》。(《癸辛杂识》。)

《宋史》卷八十二律历志："淳祐八年，朝奉大夫少卿兼尚书左司郎中兼敕令所删修官尹涣言：历者所以统天地，侔造化，自昔皆择圣智典司其事，后世急其所当缓，缓其所当急，以为利吾国者惟钱谷之务，固吾圉者惟甲兵是图。至于天文历数一切付之太史局，荒疏乖谬，安心为欺。朝士大夫莫有能诘之者，请召四方之通历算者至都，使历官学焉。"按《癸辛杂识》言在《数学大略》撰书之后，则荐九韶宜在此年。

○是年九月李治自序《测圆海镜》二十卷。

淳祐九年己酉(1249)，四十八岁。

是年九韶晤陈振孙。

宋陈振孙《直斋书录解题》卷十二："崇天历一卷、纪元历三卷立成一卷，此二历近得之蜀人秦九韶道古。……秦博学多能，尤邃历法，凡近世诸历，皆传于秦，所言得失，亦悉著其语云。"陈书各历解题当均为秦九韶语。

按《直斋书录解题》看录数术大略，则当在秦撰书淳祐七年之后，又解题卷十二开禧历条有'至今'，按淳祐十年李德卿造淳祐历，则陈之得秦书，又必在淳祐十年之前也。

陈振孙字伯玉，号直斋，浙江安吉人。曾仕鄞县学，〔《解题》卷四。〕绍兴教官，〔《齐东野语》卷八。〕南城宰，〔《解题》卷三。〕兴化军佐，〔《解题》卷七。〕端平三年以朝散大夫知台州除浙东提举，嘉熙元年改知嘉兴府，〔《会稽续志》卷二。〕淳祐四年以振孙研精经术有古典型除国子司业，〔徐元杰《楳埜集》。〕九年以某部侍郎，

〔《野语》卷九。〕除宝章阁侍制致仕赠光禄大夫。〔《刘后村大全集》外制。〕

乾隆辛酉年修《安吉州志》卷十六杂记引《湖录》："陈振孙当淳祐九年，家居，作《吴兴人物考》。"

淳祐十年庚戌(1250)，四十九岁。

是年九韶往投吴潜幕。

《癸辛杂识》："时吴履斋在鄞，亟往投之。吴时将入相，使之先行，曰：当思所处。秦复追随之。"

《宋史》卷四十三，理宗纪："淳祐九年八月己酉，以吴潜为资政殿学士知绍兴府浙东安抚使。"清吴廷燮《南宋制抚年表》卷上两浙东路引《会稽续志》："淳祐九年十一月八日，吴潜自福州知绍兴。"又《宋史》卷四百一十八吴潜传："淳祐十一年(三月戊寅)，入为参知政事，拜右丞相兼枢密使。"

九韶投吴潜幕，当在淳祐九年十一月之后及十一年三月之前。兹系是年。

〇是年李德卿造淳祐历。上元甲子至淳祐十年庚戌积一亿二千二十六万七千六百四十六，日法三千五百三十。

淳祐十二年壬子(1252)，五十一岁。

〇是年谭玉造会天历。上元甲子至淳祐十二年壬子积一千一百三十五万六千一百二十八，日法九千七百四十。

《宋史·律历志》："玉讼德卿(淳祐历)积年一亿二千二十六万七千六百四十六不合历法，今考之德卿用积年一亿以上。"按《数书九章》'治历演纪'题有云"虚置一亿减入元岁，余为实，元率除之得乘限。……在乘限以下，以乘元率为朔积年，并入元岁为演纪积年。"即为宋历成法。《直斋书录解题》："杨级大明历，其术疏浅，无足取，积年三亿以上，其拙可知。"亦指此事实也。

宝祐二年甲寅(1254)，五十三岁。

是年九韶为沿江制置司参议官。

《景定建康志》卷二十五官守志二，诸司寓治制置司："宝祐续

题名记：宝祐二年六月既望金华王埜记，参议，秦九韶。”

宝祐三年乙卯(1255)，五十四岁。

是年九韶家居安吉州(湖州)。

《癸辛杂识》：“尝闻杨守斋云：往守霅川日，秦方居家。”

按杨守斋即杨缵，《浙江通志》卷一百十五职官五宋下：“知安吉州杨缵，理宗时任。”同治修《湖州府志》卷五职官表：“郡守，南宋知州事杨缵，朝议大夫直显谟阁宝祐二年七月到任，四年五月除司农少卿七月离。”缵或作瓒，元夏文彦《图绘宝鉴》卷四：“杨瓒字继翁，……好古博雅，善琴倚调制曲，有《紫霞洞谱》传世。时作墨竹。自号守斋。”

九韶家，据刘克庄《后村先生大全集》卷八十一谓“寓居霅之关外”，《癸辛杂识》谓“在湖州西门外，地名曾上，当苕水所经。”

宝祐五年丁巳(1257)，五十六岁。

是年九韶赴扬州谒贾似道。(参见次年。)

宝祐六年戊午(1258)，五十七岁。

是年春九韶由贾似道荐于李曾伯为琼州守，凡数月去之。

《癸辛杂识》：“语人曰：我且如扬，惟秋壑所以处我。既至，贾(似道)为宛转得琼州，至郡数月归。”

宋刘克庄《后村先生大全集》卷八十一：“李曾伯帅广，委摄琼管，九韶至琼，百许日而去。”

宋李曾伯《可斋续稿》后卷卷六，回宣谕兵粮奏：“秦九韶今年正月初忽至长沙，持淮阃书相嘱令位置之，臣是时即谕以此行入广，恐无可相处。未几径来广中，适琼筦阙守，遂令暂权。”又卷六，回奏宣谕：“臣昨奏柳州阙守，乞除陈梦炎，仰蒙圣慈，特赐矜从，颁下成命，臣已祇领讫。但近因恭奉圣旨唤回权琼州秦九韶。臣以一时艰于择代，已委梦炎往权琼筦，既而正以前奏未报，尚令少留，却权委知南宁军曾充暂管琼州，替秦九韶回司。”

《宋史》卷四十四理宗纪：“宝祐五年二月戊午，以贾似道为两淮安抚使，十二月壬午，李曾伯依旧资政殿学士湖南安抚使兼广

南制置使移司静江府。”知上所云之今年正月，为宝祐六年也。

开庆元年己未(1259)，五十八岁。

是年冬九韶有江东议幕之除。又除农丞前去平江措置米饵，俱以事罢。(宋刘克庄《后村先生大全集》卷八十一。)

《宋史·职官志》："司农寺，置卿、少卿、丞、主簿各一人。卿掌仓储委积之政，令总苑囿库务之事而谨其出纳，少卿为之贰，丞参领之。"

按《数书九章》钱谷类'囤积量容'、'积仓知数'题为仓储委积之政；'折解轻赍'、'累收库本'题为库务之事。"措置米饵"指粮食的运输工作，《数书九章》亦有数题讲计算运费。

〇是年六月李治自序《益古演段》三卷。

景定元年庚申(1260)，五十九岁。

是年九韶知临江军。未几，吴潜罢相遂随潜谪居潮州(梅州)。

刘克庄《后村先生大全集》卷八十一，掖垣驳缴门，缴秦九韶知临江军奏状："准中书门下省送到录黄一道为秦九韶羌知临江军令臣等书行书读须知奏闻者。"(按此缴在是年十一月以后。)

《宋史》卷四十五理宗纪："景定元年十月壬戌，窜吴潜于潮州。"

《癸辛杂识》："吴旋得谪，贾当国，徐摭秦事窜之梅州。"

清钱大昕《十驾斋养新录》卷七："梅州本潮州程乡县，王象之《舆地纪胜》云：伪汉刘氏割潮州之程乡县，置敬州。皇朝以敬州犯翼祖讳改名梅州。"

景定二年辛酉(1261)，六十岁。

是年九韶卒于梅州。

《癸辛杂识》："在梅治政不辍，竟殂于梅。其始谪梅离家之日，大堂前大楣中断，人谓不祥。"竟成谶。

按《宋史》卷四十五理宗纪："景定三年正月戊子朔，诏吴潜党人永不录用。"九韶既卒于任，则必为景定二年矣。

〇是年正月杨辉自序《详解九章算法附纂类》十二卷。

○是年朱世杰当已生，莫若《四元玉鉴》前序(大德癸卯，1303。)：“燕山松庭朱先生以数学名家，周游湖海二十余矣。”癸卯上溯二十余年约在宋亡时，设是年朱世杰已生，则宋亡时甫弱冠，宜能演数道算也。

一九四八年八月至

一九八四年六月

秦九韶传略

李 迪

秦九韶是我国历史上卓越的数学家，他在数学方面的成就早已为国内外学术界所瞩目，国外还出了有关秦九韶的专著[1]。清陆心源(1834—1894)称赞说：秦九韶"能于举世不谈算法之时，讲求绝学，不可谓非豪杰之士"[2]。这话虽说得有些过分，但秦九韶在数学史上实为不可多见之人才。他的传记，《宋史》不载。因此，研究者不得不多方进行考证，上至四库馆员[3]、钱大昕(1728—1804)[4]、周中孚(1768—1831)[5]，下迄李俨(1892—1963)[6]、钱宝琮(1892—1974)[7]等都做过此项工作。二百年来，人们一点一滴地查找有关资料，对秦九韶的事迹初步有所了解，目前想找到几条新资料已非易事。本文就是在上述研究的基础上展开的，除了对前人使用过的资料重加核实、推敲外，还多少有些新的发现，因此也得到了某些与前人不同的看法和结论。

一

秦九韶字道古，公元十三世纪时人，他的活动在南宋宁宗(1195—1224)、理宗(1225—1264)年间，最活跃的时代是理宗中期。他的生卒年代难以准确断定。在这一节里讨论以下三个问题：

1. 关于秦九韶的父亲及家庭情况。他父亲秦季槱，字宏父，绍熙四年(1193)与陈亮(1143—1194)、程珌(1164—1242)等同榜进士出身[8]。当时，秦季槱的政治生涯不甚了解，过了二十六年后才又见记载。嘉定(1208—1224)时他为巴州(今四川巴中)守。十二年(1219)闰三月"兴元军士张福、莫简等作乱，以红巾为号"，

“夏四月庚午，张福入利州，……五月乙未朔，……张福薄遂府，潼川府路转运判官、权府事程遇孙弃城遁。……张福入遂宁府，…入普州，……六月戊辰，张福屯普州之茗山”。到七月，张福兵变被平定。这次兵变也波及到巴州，兴元(今陕西汉中)在巴州北，变兵南下遂宁(今四川遂宁)、潼川(今四川三台)、普州等地，巴州首当其冲。因此，同年“三月乙亥，兴元军士权兴等作乱，犯巴州，守臣秦季槱弃城去”[9]。跑到何处，不甚清楚。不久，辗转到了临安(今浙江杭州)。

至迟在嘉定十五年(1222)秦季槱已在南宋政府任工部郎中，该年和第二年(1223)他以工部郎中的职衔为国家大考的“考试”官和“点检试卷”工作。有两条记载分别是：“(嘉定)十五年八月五日，国子监发解，命监察御史李伯坚监试，工部郎中秦季槱、国子监丞钟震考试，监左藏东库李知新，……点检试卷”。“十六年正月二十五日命权吏部侍郎程珌、……监试，宗正少卿方猷、司封郎官魏了翁、工部郎中秦季槱、……从事照略(料)，点检试卷”[10]。

嘉定十七年(1224)九月，秦季槱除秘书少监[8]。秘书少监是秘书省的副职，从五品，而郎中为正六品[11]，因此秦季槱的此次任职有提升性质。宝庆元年(1225)正月又以秘书少监兼实录院检讨官[12]，同年六月“除直显谟阁，知潼川府”[8]。秦季槱这次回四川当地方官，行前，他的同乡和同事魏了翁(1178—1237)曾写五言[13]诗相送，诗写于七月十日[14]，这或许是秦季槱动身去四川的日子。宝庆二年(1226)正月十二日，他带着儿子九韶到涪州(今四川涪陵)与涪州守李瑀、郡纠曹掾何昌宗同去观看“石鱼”(在今四川重庆市东长江内)，并刻石题名，其中有“季槱之子九韶道古，瑀之子泽民志可同来游石鱼”等语[15]①。这是目前所知，有关

① 1984年3月17日下午，笔者曾与研究生孔国平、那日苏同去考察此刻石，虽有大量宋代刻石题名，但未见此石。考察中见到李瑀于宝庆丙戌(二年)挈子泽民等去看“石鱼出水面六尺”的题名。考察时笔者还问当地人：题名在水下是否还有，回答说还有，水位还能下降1米左右。有秦九韶名字的刻石也许没人水中了。

秦季槱的最晚一次记载，也是秦九韶第一次在历史上留下的名字。估计此后不久，秦季槱可能就死在四川了。

据周密(1232—1308)《癸辛杂识续集》卷下等记载，知秦九韶有兄有侄。至于其兄是何等样人，没有一点线索，显然在当时没有较高的社会地位。

2. 关于秦九韶的生年和青少年时期的情况。钱宝琮根据周密所说秦九韶“年十八，在乡里为义兵首”[16]一语，断为秦九韶“当生于嘉泰二年(1202)”，理由是嘉定十二年那次大规模兵变时，九韶便带领他的地主武装参与平乱[7]。这说法是靠不住的，因为，第一，在这次平乱中是否立即组织过地主武装没有历史记载；第二，这次兵变，实际上是首先进攻巴州的，然后才进入其他地区，来势之猛，官兵无法招架，他父亲秦季槱只好弃城逃走，可以说普通地主武装根本起不了作用，不一定需要地主武装，即使需要，也来不及组织；第三，这次事变后，大概不久他即随父亲到了临安，后来他自己曾说“早岁侍亲中都(临安)”[17]，就是指的这件事，似乎当时年龄尚小，至迟1222年他父亲已在临安，在离开四川之前九韶已为义兵首的可能性不大；第四，宋代有“夔州路义军土丁、壮丁”之设，又“义兵：绍兴十年集团，诸州名数不等，后皆以县令为军正”[18]。都是常设的，因而很难说秦九韶为义兵首就是在嘉定十二年，同时记载中只说为义兵首，而未说参与平乱，义兵首与平乱是两回事。

笔者认为，秦九韶的生年比钱宝琮所断约晚七年左右，只有这样才能更合乎情理些。他父亲弃巴州时他约十二岁，他父亲嘉定十五年为工部郎中时他约十五岁，回四川时约十八岁。秦九韶在临安期间正是他集中精力学习的时期，周密记载说，秦九韶“性极机巧，星象、乐律、算术，以致营造等事，无不精究，迩尝从李梅亭学骈俪诗词，游戏、毬马、弓剑，莫不能知。”[16]可以说他是个全才，而基础则是在临安期间打下的。他父亲就是读书人，曾治《春秋》，必定要使秦九韶受到较好的教育，而且要利用一切

可能的机会对他进行培养，他本人也是个爱好学习的人。

秦季槱官工部郎中为儿子九韶学习营造提供了条件，因为"工部：掌天下城郭、宫室、舟车、器械、符印、钱币、山泽、苑囿、河渠之政"，而工部郎中则管理营缮等方面的工作[19]。他既有机会看到民间难以看到的建筑书籍，又有机会跟随父到工地上去参观。秦九韶在土木建筑方面有丰富的知识，造诣很深[20]，不能说与这种环境毫无关系。

周密说：秦九韶"尝从李梅亭学骈俪诗词"，也是在这时。李梅亭就是李刘，当时任两浙转运司干办公事，嘉定十六年(1223)正月二十五日与秦季槱一同"从事照略，点检试卷"工作[20]，是同事，一定很熟悉。秦九韶向他学习骈俪诗词乃是自然之事。后来他们成为朋友，经常有来往。

秦九韶说："早岁侍亲中都，因得访习于太史"，此事应在嘉定十七年(1224)。因为这一年他父亲被调到秘书省任秘书少监，宋秘书省"监，掌古今经济图书、国史实录、天文历数之事，少监为之二，而丞参领之"，日历所和太史局。"南渡后，并同隶秘书省"[21]。太史局是研究天文历法的机构，其长官称太史令。秦九韶所说的"太史"正是秘书省下属机构的官员，是国家的天文学工作者，向他们学习是再方便不过了。至于他向哪几位太史学习，历史上没有记载。笔者认为是一些人，这里"太史"应是泛称，估计秦九韶是常到太史局去请教，碰到谁就问谁。当时用的是鲍澣之造的《开禧历》(行用年代为1208—1250)，学到的知识自然多与此历有关，所以他对《开禧历》的原理很熟悉。

他又说："尝从隐君子受数学"[17]，没说年代，也未说明这位隐君子是谁。笔者猜测，隐君子可能是陈元靓。陈元靓博学多闻，著有《事林广记》、《博闻录》和《岁时广记》等书，当时他被人称为隐君子。宋代刘纯说："龟峰之麓、梅豁之湾，有隐君子、广寒之孙，涕唾功名金玉，篇籍采九流之芳润，撷百世之英华，辅以山经海图，神录怪牒，穷力积稔，萃成一书，目曰《岁时广记》"[22]。

陈元靓与秦九韶同时代，而年事可能稍长。《岁时广记》写成后陈曾求朱鉴作序[23]。据陆心源考证，朱鉴宝祐六年卒，年六十九[24]，即1190—1258年，为朱熹(1130—1200)之孙。朱熹、陈元靓都是道学家，或者对秦九韶有所影响，秦认为"数与道非二本"[17]的"道"可能是通过隐君子陈元靓而学到的。如果真是这样，秦九韶如何与陈元靓接触，则没有找到直接记载。陈元靓福建崇安（今福建崇安）人，居住在"龟峰之麓、梅溪之湾"(今福建泰宁一带)，刘纯也是崇安人(绍定三年(1230)由于镇压当地农民起义被起义者活捉、处死[25])，朱鉴是安徽婺源人。由此可知，绍定三年之前，陈元靓已有隐君子之称，他和朱鉴等一起在临安的机会最多，他看书极多而且有些是新出的书，应到过文化发达的城市，居处距临安至多不过千里，去临安似不困难。从绍定三年上推若干年，正是秦九韶在临安的时候，一位博学的隐君子到了自己的身边，向他学习数学(不是今天意义下的数学)应是可能的。

由上所述可知，秦九韶随父亲在临安的数年间把全部精力用在学习上。他正是通过这样多方面的学习，才逐渐成为一名学识广博的学者。

3．关于秦九韶的籍贯问题。这个问题很复杂，历来众说纷纭。因此，不得不加以探讨。

有关秦九韶的籍贯(或说是何地人)归结起来共有四说，即①秦凤间人；②鲁郡人；③普州安岳人；④蜀人。矛盾说法南宋末即已存在，第一说系周密听陈圣观所说[16]，第二说系秦九韶自己所讲，在《数书九章》自序上署"鲁郡秦九韶叙"，该书现传本每卷的开头也都有"鲁郡秦九韶"五字，清代也有人写"宋秦九韶撰"五字的[26]。宋末陈振孙说《数术大略》九卷为"鲁郡秦九韶道古撰"[27]，《数术大略》就是《数书九章》[28]，由此可知"鲁郡秦九韶道古撰"显系原书的署名，"宋秦九韶撰"为后人妄改。因此，秦九韶自称鲁郡人，则确凿无疑。第三说最早见于宋代，为他父亲的"籍贯"，钱宝琮则定为秦九韶的籍贯[7]。第四说来自陈振孙，他在讲到北

宋《崇天历》和《纪元历》时说："此二历近得之蜀人秦九韶道古"[27]，清代钱大昕引用过这条资料[4]。李俨平列了①、②和③三种说法，未加评论[6]。钱大昕在引用了前述的资料后说："然则九韶先世盖鲁人，而家于蜀者也。"[4] 钱宝琮认为："鲁郡是秦氏先世所居，不是季槱、九韶的籍贯。周密《癸辛杂识续集》说秦九韶为'秦、凤间人'，是错误的"，因此肯定秦九韶是普州安岳人。还有人只说秦九韶"生于四川"[29]，梁宗巨则同意秦九韶自己的说法，认为是"鲁郡(今山东滋阳、曲阜一带)人"[30]，等等。就是说直到今天，人们对秦九韶的籍贯还是各有各的主张。

究竟哪一种是对的呢？都有一定的正确成分，但又都不确切或不完全。笔者认为秦九韶的原籍为鲁郡，其先世有可能是在唐末五代或北宋时由鲁郡迁到秦凤间，然后再南下普州，定居于安岳。案：晋改鲁县(今山东曲阜)为鲁郡，隋大业时改鲁州，唐时又改兖州为鲁郡[31]。五代以后没有鲁郡这种建制，宋代更无此称。很显然，秦九韶是为了表示不忘祖籍，便在自己的书上写上"鲁郡"。在历史上隔几百年之后仍按其祖籍称呼某人的做法颇不乏例，如唐代人说祖冲之、祖暅父子为范阳人，实际上祖氏先世早已迁到江南。又如邵雍(1011—1077)，"其先范阳人，父古徙衡漳，又徙共城。雍年三十，游河南，葬其亲伊水上，遂为河南人"[32]。这些事实给我们提供了理解秦九韶籍贯问题的参考。周密在[15]中所记秦九韶事迹基本上都是可靠的，大都能找到他人记载，互相印证。因此秦九韶为秦凤间人之说并不是信口之说。查秦凤路于十二世纪归金管辖，秦九韶之先世应于该地入金之前南下。

至于说秦九韶为蜀人只是一种泛称，是指他来自蜀，但具体为何州何县说不清楚。就如现代人说某人为四川人一样，根本没有籍贯意义。

二

秦九韶随父亲季槱回到四川之后，才逐渐走上社会，开始了独立政治生涯。现分以下三个问题，论述他青壮年时期的活动。

1. 关于义兵首、某县尉和差校正问题。宝庆元年(1225)七月十日，秦季槱带着妻子儿女启程回潼川做官，如魏了翁所说是锦衣还乡[13]。秦九韶先随父亲去东南，不久回四川，回四川后的第二年还随父亲去涪州游览，说明在此期间，他的年龄还不大，未能离开父母而独立。这次秦季槱回四川与离开时相距五六年，嘉定十二年(1219)兵变时造成的烂摊子要他去收拾，让自己的儿子九韶担任一点什么职务也是理所当然的。"年十八在乡里为义兵首"，很可能是宝庆元年的事情。所谓"乡里"不一定是指的家乡，而应理解为现住地。当时潼川府治在郪县内，与郪县治同邑。因而有理由认为：秦九韶是在郪县当义兵首，不会跑到老远的安岳去干事。这是他走上社会的开始，而又在父母身边。周密记载说：秦九韶"豪宕不羁，尝随其父守郡。父方宴客，忽有弹丸出父后，众宾骇愕，莫知其由。顷加物色，乃九韶与一妓狎，时亦抵踰，此弹之所由来也。"这件事应是在他为义兵首之后。

大约几年之后，秦九韶便由义兵首转升为郪县县衙门的正式官吏——县尉。历史上只有秦九韶当县尉的记载，而没有说是在哪个县。这一点，可以得到间接的证明。南宋时县尉的职责等有明确规定："沿边诸县间以武臣为尉，并带兼巡捉私茶、盐、矾，亦或文武通差。……嘉定十三年，诏极边县丞，获盗酬尝班改，岁以二员为额"[13]。县尉经常由武行出身的人担任，因此，秦九韶由义兵首到本县县尉也是顺情顺理的事情。

秦家与魏了翁、李刘等关系密切，后来仍有直接或间接的联系。李刘有"回秦县尉谢差校正〔九韶〕启"[34]，证明秦九韶确实在官县尉，但未说明何时与何县。为了分析与秦九韶有关的问题有

必要把“启”全文引录如下：

> “善继人志，当为黄素之校雠，肯从吾游，小试丹铅之点勘，表微甚愧，尝巧可乎？恭惟〔某官〕心爽而志崇，齿新而意宿，试剑驰马，早欲范王良之游，游刃解牛，今将近庖丁之道，缲捧行施于北部，青毡会意于西崑。今开万卷，余义理在文辞之表端，能几字正，始终有条理之科。所望远来之朋，共成相观之善，卿自用卿法，在良弓之子，必学为箕人，患为人师，然他山之石可以攻玉。”

这封回启的内容是说秦九韶同意做南宋王朝的校正官，而李刘表示欢迎。校正是国史实录院的下级官员[35]，“当为黄素之校雠，肯从吾游，小试丹铅之点勘”，说的是两个人从事对黄色封面的书进行对校。“今开万卷”一语，似乎是指宋政府打算对国家图书馆的藏书进行一次全面校对，需要较多的人参加这一工作，秦九韶已成青年有名学者，由李刘推荐将其调来共同从事校勘。李刘在回启中既有向秦九韶学习之类的谦虚之词，又有对他的告诫之语。“所望远来之朋，共成相观之善”，说明李刘当时在临安，而秦九韶远在四川，相距很远，其中极堪注意的是“远来”二字，就是说，是秦九韶从远道的四川到李刘处，而不是反之或两人同时到某处。

至于这件事是在什么时候，秦九韶是否由县尉去当校正？都没有查到其他记载。根据以后要讲的事实来看，秦九韶可能未去赴任。李刘的活动，历史记载也不多，宝庆间他不在临安，而是在武冈军（今湖南武冈）任通判，因魏了翁在“答武冈军李通判”中有“今在罪籍”之语[36]，魏被贬居靖州（今湖南靖县），时间是宝庆元年（1225）年末到四年（1228）夏[37]。从“今”来看，应是被贬不久，这时秦九韶是否已为县尉尚成疑问，李刘又不在临安，他调九韶为校正不大可能。李刘很快又官成都漕，到任后有“除成都漕到任谢史丞相”[38]一纸送京。南宋中后期有两个史丞相，一为史弥远（1164—1233），从嘉定元年（1208）起为丞相，直到去世；一为史嵩之（？—1256），从嘉熙三年（1239）起为丞相。李刘在谢表中说：“盖自利路

之荒残，寻至潼川之剽掠”，“伏念〔某〕多病不材，至愚极陋，少年躁妄……”，可知他是在嘉定十二年兵变若干年后去成都的，而且当时年岁不太大，因此所说的史丞相以指史弥远为合理。由此推之，李刘去成都当在魏了翁被贬之后、史弥远去世之前，最可能的年代约在1228—1230年间。成都府治与潼川府治相距甚近，李刘与秦九韶又有更多接触的机会，对秦九韶有进一步的了解。大概李刘到成都不久，又被调回临安，而且提名秦九韶为国史院校正。

2. 关于出蜀去东南问题。这次秦九韶本人表示同意的任命，不知道是什么原因，并没有去报到上任，仍留在四川。过了一段时间，他确实去了东南，为什么去东南，何时去的？同样没有明确记载，也没有任国史院校正。秦九韶于1247年写的《数书九章序》中说："际时狄患，历岁遥塞，不自意全于矢石间，尝险罹忧，荏苒十祺，心槁气落"。这是他追述约十年前的情景，"狄患"是指蒙古军队进入四川。据记载：蒙古太宗七年(1235)"秋七月……阔端率汪世显等入蜀，取宋关外数州，斩蜀将曹友闻"[39]。宋端平三年(1236)十月"大元太子阔端兵离成都，大元兵破文州，……"[40]。同年，遂宁府、顺庆府、普州、利州、阆州、隆庆府、政州等地都有"兵乱"[41]。秦九韶所在的潼川府，也是蒙古军队到达之处，他无力抵抗，必于此时离开。但是离开之后，是否立即去东南，不好断定。如按准确的年限计算，则"十祺"应是十年，1247上推十个年头为嘉熙二年(1238)，而不是1235或1236年。这可以做两种解释：第一种，他离潼川后仍留在四川东南部未受战争影响的地方，两三年后才离开；第二种"十祺"是约数，指十年前后。似乎前一种理解比较符合事实。

多年之后，刘克庄(1187—1269)曾数说秦九韶的"罪行"："方其未出蜀也，溃卒之变，前师藏匿某所。九韶指示其处，使凶徒得以甘心，人死我活，有愧戴履"[42]。这段话所指的详细内容，不得而知。其中头两句，显然是指被蒙古军队击溃的南宋士兵的哗变，"前师藏匿某所"是指"溃卒"的指挥官由于受"溃卒"的追拿

而藏匿在某个地方，秦暗示"溃卒"将"前师"杀掉。很可能"前师"被杀之后，"溃卒"便落在秦手中。这件事发生在他要出蜀之前，约在1235、1236年间。秦出蜀的时间当在此后。

3． 关于"倅蕲"与"守和"问题。刘克庄的话除上面所引外还有"倅蕲妄作，几激军变；守和贩鹾，抑卖于民"[42]之语。其中"蕲"有些书上误为"斩"，钱宝琮给以校正是对的。"蕲"指蕲州（今湖北蕲春），"和"指和州（今安徽和县）。秦九韶带领他得到的一些"溃卒"离四川东来，在蕲州当了副职（倅）通判，但由于他"妄作"，差一点把所率的士兵弄得哗变。他又到和州，任最高行政长官，利用职权贩卖食盐，强行卖给百姓。

这两件事是秦九韶离开四川后发生的。尚未找到详细记载，因而不便多说。

三

秦九韶离四川东来，是否先到京城临安没有记载，以理推之，应先入京述职，然后再外出做官。此后，约十年左右是秦九韶比较顺利的时期，在学术上也取得了成就。

1． 与吴潜的关系。周密记载说：秦九韶"既出东南，多交富豪"，又说"与吴履斋交尤稔"。吴履斋即吴潜（1196—1262），嘉定十年（1217）举进士第一，绍定四年（1231）为尚书右郎官，嘉熙三年（1239）五月为兵部尚书、浙西判置使、知镇江府。秦九韶到东南的时候，也正是吴潜官运亨通的时候，且吴潜本人又注意选拔人才，端平元年（1234）他向南宋朝廷提出过九条建议，其中第五条是"广畜（蓄）人才以待乏绝"[43]，他说："积才如积谷，陈未尽而纳其新。种才如种木，本未萎而培其蘖。"说明人才需及早培养。又引前人的主张说："栽接必有候，耕贩必有方……拔十得五，拔五得二，必有杰……。"[44]秦九韶去东南恰在此后，而且他本人又是一个很有才干的青壮年人，被吴看中乃是意中之事。

秦九韶到东南后的最初几年有过什么活动，因史书缺载，不清楚。很可能因吴潜的关系在湖州(今浙江湖州市)做地方官。周密记载说："吴(潜)有地在湖州西门外，地名曾上，正当苕水所经，入城面势浩荡。(秦九韶)乃以术攫取之，遂建堂其上，极其宏敞；堂中一间，横亘七丈，求海桄之奇材为前楣，位置皆匠心。凡屋脊两翚搏风，皆以砖为之。堂成七间，后为列屋，以处秀姬、管弦，制乐曲度，皆极精妙，用度无算。"至于秦九韶怎样从吴潜手中"攫取"了湖州西门外的土地，不得而知，那种豪华的建筑是后来的事，决非一日之功。无论如何，他是通过吴潜在湖州扎下了根。

2. 建康通判与著书。秦九韶到东南后第一次有明确记载的官职是建康(今江苏南京市)通判。据记载，秦九韶以通直郎于淳祐四年(1244)八月为建康通判，但时间很短，"十一月丁母忧，解官"[45]，回湖州家里守孝。

秦九韶到东南后，生活虽然比较安定，但因受战争的影响而心情不佳，所以他把相当一部分精力放在数学研究上，他说："心槁气落，信知夫物莫不有数也。乃肆意其间，旁取方能，探索杳渺，粗若有所得焉。"其中"数"本是指"天数"、命运，而不是数学的数，但他却由此而进入数学领域，完成了数学史上的杰作《数书九章》一书，时在淳祐七年九月，他尚在守孝期间。这部书共收八十一道题，分为九大类，大都与当时社会经济有密切关系[46]。秦九韶之所以能做到这一点，显然与他的经历直接相关，特别是县尉和两任通判都与钱粮、赋役、户口等类工作分不开。他对物价、度量衡、各地间的里程等事项都非常熟悉，书中的内容基本上都符合当时的社会实际。他写书虽说是从"数"出发，但最后的目的是"以拟于用"，八十一道题是经过精心选择的。

3. "或以历荐于朝"。周密记载说：秦九韶"或以历荐于朝，得对，有奏稿……"，这虽是一段推测之词，但可能性是很大的。据记载："淳祐四年，兼政殿说书韩祥请召山林布衣造新历。从

之。"[47]又一说为淳祐五年八月"诏求通天文历学之人"[48]。很可能是先请求，得到批准，到第二年八月才真正做这件事。此时秦九韶正在家守孝，可算是"布衣"，他被召到朝廷阐述自己对天文历法的见解是合乎道理的，阐述的形式便是奏稿。秦九韶不仅精通数学，而且对天文历法有高深造诣，与他同时代的陈振孙说："秦博学多能，尤邃历法，凡近世诸历，皆传于秦(九韶)……。"[27]这与被荐于朝的说法颇相符合。

4．与陈振孙的关系。这是一个前人未曾明确提出过的问题。本文前面已经两次涉及到陈振孙，均未对他们的关系进行必要的说明。陈振孙在谈到《崇天历》、《纪元历》之后说："本朝承平，诸历略具正史志，不见全书。此二历近得之蜀人秦九韶道古，故存之。"[27]这两部历法都是北宋编的，《崇天历》天圣二年(1024)问世，到秦九韶时代已有二百年之久，而《纪元历》于崇宁五年(1106)编成，也已有一百几十年的历史了。到秦九韶时代，两历都早已废弃不用，流传的历本自然极为稀少。秦九韶留心学术，收藏着前人编的历书，说明他在天文历算方面的藏书相当丰富。从上引"近得之蜀人秦九韶道古"句中，"近得之"三字至关紧要，是说他近来从秦九韶那里亲自看到过上述两部历法，才将其目录收入著作中。事情很清楚。陈振孙曾在福建莆田做官，得书五万多卷，端平中为浙西提举，改知嘉兴府，又升为侍郎。二人住处相距不远，有接触的机会，很可能是由于秦九韶被荐于朝、上奏历法问题引起陈振孙的注意，陈去拜访了秦。

秦九韶从到东南至守孝毕约十年时间，虽然做过地方官，但其主要精力是放在学术研究上，并且取得了卓越成就。可以说是他一生中的学术创造期。

四

秦九韶守孝结束时，虽是40岁左右的壮年期，可是，他已经

进入晚年，仕途并不顺利，东奔西走，最后死于梅州。

1. 由沿江制置司参议到权知琼州。按古代守孝三年的期限计算，秦九韶于1247年秋满期。此后若干年内没有记载，直到宝祐间(1253—1258)才见于历史。沿江制置司"参议：宝祐吴蒙、李仲鳌、秦九韶、印应雷，……"[49]，其中只说宝祐，都没有记年代，可能是按任职先后次序排列，假定真是如此，秦九韶任职当在宝祐二、三年间(1254、1255)。有人据同一资料说是宝祐二年[7]，不知是怎么回事。

可是秦九韶担任这个官职时间不长，很快就去职家居。因此，他便到处奔波，找上层人物，除吴潜外还有贾似道(1213—1275)、李曾伯(1198—？)等，想找个官做。周密记载说：秦九韶"赍十万钱如扬，惟秋壑所以处我，既至，遍谒台幕。……秦（九韶）不为官久之，贾为宛转得琼州，行未至，怒迓者之不如期，取驭卒戮之，至郡数月，罢归，所携甚富。"通过贾似道到琼州去做地方官这件事有案可查，整个过程大体清楚，惟时间需作些考证。秦九韶的任职问题，有时连最高统治者宋理宗都过问。上引文中的"秋壑"就是贾似道，他比秦九韶年龄小，发迹很快，曾长期在两淮做官，淳祐十年(1250)三月，为端明殿学士、两淮制置大使、淮东安抚使、知扬州"[50]，宝祐五年(1257)二月，为两淮安抚使[51]，仍在扬州。结合前后情况来看，秦九韶去扬州找贾似道应在宝祐五年。贾对他也很重视，并给予手书令投李曾伯。李当时在长沙，宝祐五年正月任荆湖南路安抚使兼知潭州(州治即今湖南长沙市)，十一月兼节制广南，任责边防，十二月移司静江府(府治即今广西桂林市)[51]。秦于宝祐六年(1258)正月到长沙，见到李曾伯(这时他虽已受命移司静江府，但还未离开潭州)。李在一份给宋理宗的回奏中说："臣所准圣谕秦九韶者，臣本与秦素昧，今年正月忽至长沙，持淮阃书相嘱，令位置之。"[52]当时贾很有权势，李只好答应给秦安排位置，正好去广南，准备同行，他在同一回奏中接着说："臣是时即谕以此行入广，恐可(与秦)相处，即

送之以礼”。可是，“九韶乃欲索回淮阃之书，谓书千里挈家而来不可徒还”。此时正值李辖区内的琼州缺守，遂命秦九韶代理（权）。秦到琼州后不久，李感到此项任命不妥，于是准备把他调回，并“令参议官陈梦炎俾往权管，旦夕即便起发。俟九韶到此（案：大约是指回到静江府），臣当厚遗以遣其出广。”[52]李在另一封回奏中也说：“……琼、钦、宜缺守，琼已差陈梦炎往替秦九韶。”[53]至于李为什么调回秦九韶，根据他下述的说法知是最高统治者下的命令：“又准圣谕，以臣昨奏柳州阙守，乞除陈梦炎，仰蒙圣慈，特赐矜从，颁下成命，臣已祗领讫。但近因恭奉圣旨，唤回权琼州秦九韶。臣以一时艰于择代，已委陈梦炎往权琼筦，既而正以前奏未报，尚令少留，却权委知南宁军曾先暂管琼州，替秦九韶回司。”[53]从这段话中也反映出，当时得力官员的匮乏。直接替回秦九韶的是曾先，而不是陈梦炎，但正式接替的将是陈梦炎。后来刘克庄说秦九韶“到郡（琼州）仅百日许，郡人莫不厌其贪暴，作卒哭歌以快其去”[42]，与周密所记“至郡数月，罢归，所携甚富”相一致。很可能是由于他的贪暴、遭到当地百姓的强烈反对而被撤职的。这大约是宝祐六年下半年的事。

2. 追随吴潜。秦九韶从琼州回到湖州后，还是希望有个官做，于是继续活动。大约于宝祐六年末或开庆元年（1259）前半年，“时吴履斋在鄞（今浙江宁波市）”，秦“亟往投之”。吴潜于宝祐四年四月，为沿海制置使、判庆元府（府治在鄞），开庆元年八月改任他职，秦到鄞投靠他当在开庆元年八月之前。十月，以吴潜为左丞相兼枢密使，进封相国公；贾似道为右丞相兼枢密使，进封茂国公，宣抚大使等如旧。秦九韶还是想通过吴潜做官，吴告诉他“当思所处”，是否给他什么官做，没有确切记载。但在这前后，对秦确有两次任命，是否吴潜提议，不清楚。第一项是开庆元年秋天有“江东议檄之除”，第二项是同年冬天又“除农丞，前去平江措置米饵”，“江东”当为江南东路之简称，而“农丞”就是司农寺丞，平江即平江府（府治在今江苏苏州市），都遭到驳论，“其

命遂寝"[42]。

景定元年(1260)初，秦又被命知临江军(今江西清江)，遭到刘克庄、魏近思等激烈批驳，坚决反对此项任命，并历数秦罪。[42]但这次任命是谁提出来的，没有查到资料。当时刘克庄因与贾似道"有旧，除秘书监，复除起居郎兼权中书舍人"[54]，因此很了解秦九韶的人事档案，故有秦罪"具载丹书"的说法。这次任命，可能因刘克庄等反对也取消了。

3. 被"窜之梅州"。正在秦九韶任职争论不休的时候，统治集团内部的斗争也日趋激烈。景定元年七月，吴潜被劾有"欺君无君之罪"，十月窜吴潜于潮州，第二年四月又窜吴于循州，七月吴潜责授化州团练使，循州安置。循州治位于今广东龙川西南。景定三年(1262)正月，诏吴潜党人，永不录用[55]。吴潜死于这年五月十八日[56]。贾似道当国，独览大权，凡他所恶，无论贤否皆被排斥。这一事件也涉及到秦九韶，可是秦与贾似道也有来往，因此并没有立即对他进行处理。周密写道："吴(潜)旋得谪，贾(似道)当国，徐摭秦(九韶)事，窜之梅州，在梅治政不辍，竟殂于梅。"在这段文字中值得注意的"徐摭秦事"一语，意思是慢慢地提出了秦的问题，然后贬至梅州(今广东梅县)，在那里做官，处理上和吴潜不同。秦九韶是否完全被看做是吴潜党人，也很难说。九韶想借吴的地位找官做，而吴又可能爱他的才。正是由于有这样关系，再加上当时朝野对他的不满，于是才将他"窜之梅州"。诏吴潜党人永不录用，不一定包括秦九韶。

秦九韶是哪一年死于梅州，不好确定。有人根据秦"在梅治政不辍，竟殂于梅"和景定三年诏吴潜党人永不录用推测：秦九韶死于景定二年(1261)[7]。此说未必可靠，因为秦是否吴党尚属疑问，同时"治政不辍"应指时间较长而言的，不是一年半载。吴潜从被谪到永不录用，仅一年零两个月，九韶又是后来才被处理的，时间当然更晚。实际上，秦的死年可能比景定二年要晚若干年。周密还说："秦亡后养子复归，与其弟共处焉。"说这话的时间是

秦死后过一段时间而又不是相隔很久(如十几年)。周密所记的话全系陈圣观所说，查陈圣观于咸淳十年(1274)曾与周密会面，周密说："咸淳甲戌秋，余为丰储仓，时陈圣观过"，二人谈了很多问题[57]。很可能就是这次谈话中，陈圣观向周密讲了秦的事迹，周密将其记下而流传于世。咸淳十年(甲戌)至景定二年已整十三年，从谈话的口气看，秦已死去一段时间，大约死于咸淳中。至于陈圣观与秦有何关系，他怎么对秦的底细了解如此清楚，没有找到历史记载。

在上面的论述中，已多次见到有关秦的人品问题。但是他到底是个怎样的人，从宋代起就有不同看法，李刘、陈振孙对他是称赞，特别是对他的学识和能力更是大加表扬。而刘克庄、陈圣观、周密则持相反的看法，攻击的最厉害的是刘克庄，除上面已引者外，还有："若使其真有材能固不可以一青废，今通国皆谓其人暴如虎狼，毒如蛇蝎。奋爪牙以搏噬，鼓唇吻以中伤，非复人类"，"其人不孝不义不仁不廉"，并举了不少事例以做证据[42]。周密引陈圣观的话，也有"己未透渡，秦喜色洋洋然"，"秦向在广中，多蓄毒药，如所不喜者，必遭其毒手，其险可知也"之语。所谓"己未透渡"指己未年(1259)蒙古军队一度突破长江，历史上确有其事，说秦对此表示高兴；而毒药之说又是陈圣观听一个叫杨守斋的官员说的，杨有一次到秦家，秦给他一杯如"墨色"的汤，杨不饮而归，猜测是毒药。这些说法就没有什么根据了。

秦九韶的人品肯定是不好的，但他又是一位学识渊博、有卓越成就的学者，两者应当分开，对他的为人必须批判。

参 考 文 献

〔1〕U.Libbrecht(李倍始),Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, M.I.T. East Asian Science Series, Vol.I, 1973。
〔2〕陆心源：《仪顾堂题跋》卷八。
〔3〕《四库全书总目提要》卷二十"数学九章九卷"条。
〔4〕钱大昕：《十架斋养新录》卷十四。

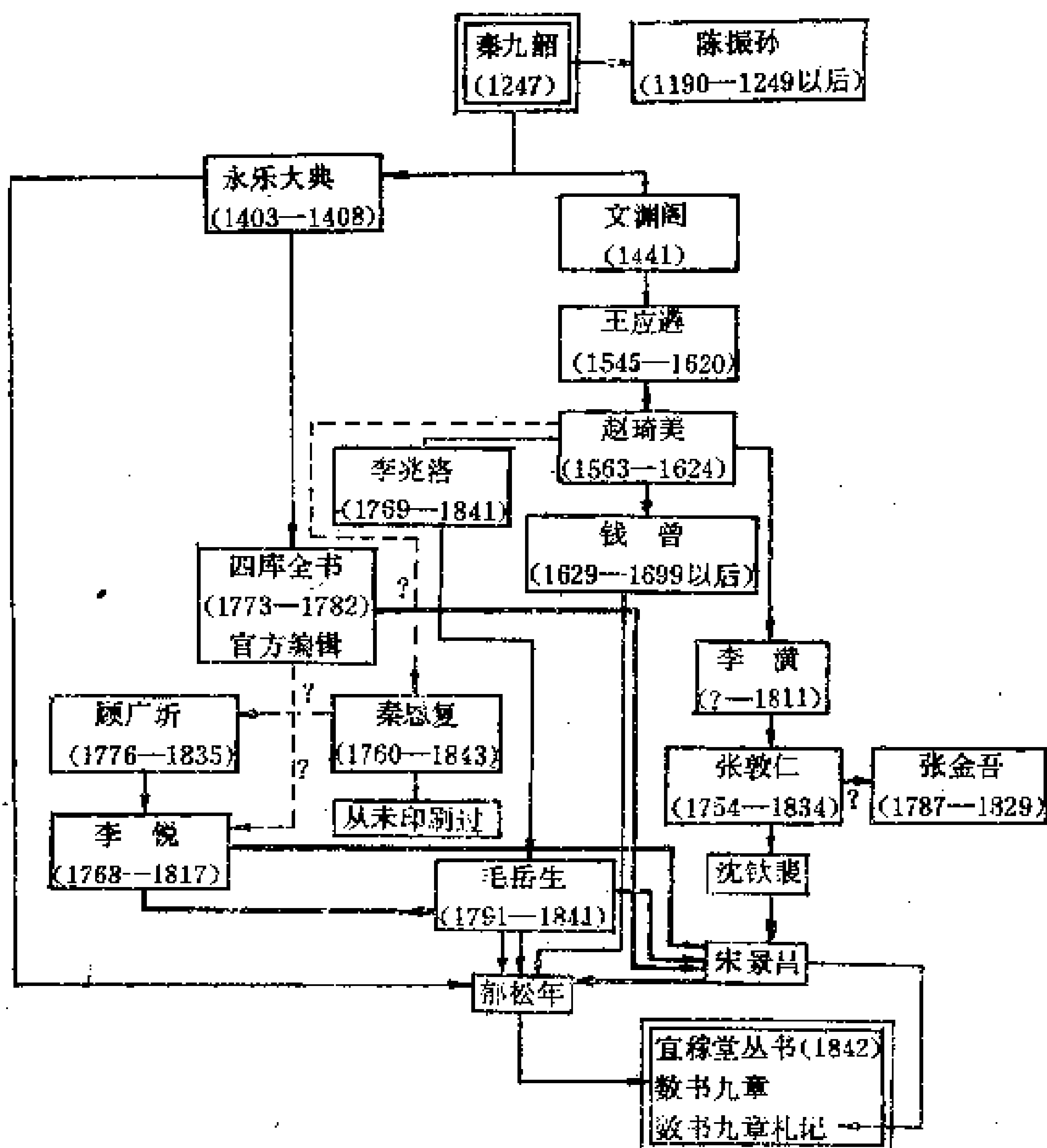
〔5〕周中孚：《郑堂读书记》卷四十五。
〔6〕李俨：《中国数学大纲》上册，1933，商务印书馆，第117—119页。同书修订本，1958，科学出版社，第158—160页。
〔7〕钱宝琮：《秦九韶〈数书九章〉研究》，《宋元数学史论文集》，1966，科学出版社，第60—103页。
〔8〕《南宋馆阁续录》卷七。
〔9〕《宋史》卷四十“宁宗本纪四”。
〔10〕《宋会要辑稿》卷一三二五〇“选举二一”。
〔11〕《宋史》卷一六八“职官八”。
〔12〕同〔8〕，卷九。
〔13〕魏了翁：《鹤山先生大全集》卷四“送秦秘监季槱以显谟知潼川”。
〔14〕同上，目录。
〔15〕姚觐元：《涪州石鱼文字所见录》，咫进斋抄本（藏北京图书馆）。
〔16〕周密：《癸辛杂识续集》卷下。
〔17〕秦九韶：《数书九章序》（1247）。
〔18〕《宋史》卷一九二“兵六”。
〔19〕《宋史》卷一六三“职官三”。
〔20〕沈康身：《秦九韶与土木建筑学》本书。
〔21〕《宋史》卷一六四“职官四”。
〔22〕刘纯：《岁时广记引》。
〔23〕朱鉴：《岁时广记序》。
〔24〕陆心源：《重刊足本岁时广记序》。
〔25〕《宋史》卷四十一“理宗一”；〔24〕。
〔26〕王萱龄临李锐校本《数书九章》。
〔27〕陈振孙：《直斋书录解题》卷十二“历象类”。
〔28〕李迪：《〈数书九章〉流传考》本书。
〔29〕杜石然等：《中国科学技术史稿》，下，1982，科学出版社，第38页。
〔30〕梁宗巨：《世界数学史简编》，1980，辽宁人民出版社，第417页。
〔31〕《辞海》“地理分册（历史地理）”，1978，上海辞书出版社，第252页。
〔32〕《宋史》卷四二七“道学一”。
〔33〕《宋史》卷一六七“职官七”。
〔34〕李刘：《梅亭先生四六标准》卷三十六。
〔35〕《宋史》卷一六八“职官八”。
〔36〕魏了翁：《鹤山先生大全集》卷三十四。
〔37〕《宋史》卷四十一“理宗本纪一”。
〔38〕李刘：《梅亭先生四六标准》卷八。
〔39〕《元史》卷二“太宗本纪二”。
〔40〕《宋史》卷四十二“理宗本纪二”。
〔41〕《宋史》卷八十九“地理五”。

〔42〕刘克庄：《后村先生大全集》卷八十一“缴秦九韶知临江军奏状”。
〔43〕《宋史》卷四一八“吴潜”。
〔44〕吴潜：《许国公奏议》卷一“应诏上封事条陈国家大体治道要务凡九事”。
〔45〕《景定建康志》卷二十四“官守一”。
〔46〕李迪：《〈数书九章〉与南宋社会经济》本书。
〔47〕《宋史》卷八十二“律历志十五”。
〔48〕毕沅：《续资治通鉴》卷一七一“宋纪一七一”。
〔49〕《景定建康志》卷二十五“官守二”。
〔50〕《宋史》卷四十三“理宗本纪三”。
〔51〕《宋史》卷四十四“理宗本纪四”。
〔52〕李曾伯：《可斋续稿后》卷六“回宣谕兵粮奏”。
〔53〕李曾伯《可斋续稿后》卷六“回奏宣谕”。
〔54〕陆心源：《宋史翼》卷二十九“刘克庄”。
〔55〕《宋史》卷四十五“理宗本纪五”。
〔56〕刘一清：《钱塘遗事》卷四“吴潜入相”。
〔57〕周密：《癸辛杂识前集·陈圣观梦》。

《数书九章》流传考

李 迪

《数书九章》的流传问题过去很少有人专门研究，十余年前比



利时学者李倍始(U.Libbrecht)在其专著中第一次比较深入地研究了这个问题，并且画了一幅流传关系图[1]，现将其译为汉文列下：

但是由于有许多文献和《数书九章》的现存抄本未能见到，因此他的图形有些地方不准确，同时有重要遗漏。本文是在李倍始工作的基础上，利用较多较全的资料和各种可能见到的抄本《数书九章》，作了进一步研究而写成的。

《数书九章》从成书到现在将近七百四十年间，有固定的刊本不过一百四十多年。在长达六百年的漫长岁月里只有抄本流传。这部书还是受到重视的，明、清两代都把它收入了由政府主编的大型丛书中。到底有过多少抄本，现在还无法彻底弄清，不过明、清抄本可以在一些图书馆中找到。

为了说明问题，本文将分以下五部分。

一、早期的流传

从《数书九章》问世到明初永乐以前，即约1400年以前的一个半世纪，它的流传情况目前最不清楚。

由书的自序所记“时淳祐七年九月鲁郡秦九韶叙”，知道《数书九章》应成于公元1247年。可是由于当时没有出版，原稿又已失传，其原貌如何不得而知，就连书名都不确切，《数书九章》一名直到明代后期才出现。

在宋元文献中只有两条与《数书九章》有关的记载，这就是人们熟知的陈振孙和周密的著作。陈振孙说：“《数术大略》九卷”，“鲁郡秦九韶道古撰”[2]。周密说：“秦九韶字道古，……或以历学荐于朝，得对。有奏稿及所述《数学大略》。”[3]所记在书名上只差一个字，后者未提到卷数，杨辉、朱世杰在著作中都没提到这部书，明程大位(1533—1606)在所列“嘉定、成淳、德祐等年又刊各书”书目中也未收入《数书九章》，说明该书当时没有刊刻。

现在可以肯定地说，原书不叫《数书九章》，而应是《数术大

略》或《数学大略》。问题是这两个名字，何者正确。从秦九韶自序来看，两名都合理，他说："今数术之书，尚三十余家，天象历度谓之缀术，太乙、壬、甲谓之三式，皆曰内算，言其秘也。《九章(算术)》所载，即周官九数，系于方圆者为叀术，皆曰外算，对内而言也。其用相通，不可岐二。独大衍法不载《九章》，未有能推之者，历家演法颇用之，以为方程者误也。"根据这段话来看，数术包括了内算和外算两方面，大衍求一术也在其内，其书名冠以"数术"二字是理所当然的。但是他又说："……又尝从隐君子受数学。际时狄患，历岁遥塞，不自意全于矢石间，尝险罹忧。荏苒十禩，心槁气落。信知夫物莫不有数也，乃肆意其间。旁诹方能，探索杳渺，粗若有得焉。所谓通神明，顺性命，固肤末于见，若其小者，窃尝设为问答，以拟于用，积多而惜其弃。因取八十一题，厘为九类，立术具草，间以图发之。"这段话正是说明其书的内容、题数和类数，而又都属于"数学"的范围，由此可见书名应冠以"数学"二字。

笔者认为，两种叫法似乎都正确，但不是秦九韶一书取两名，而是后人所改。根据陈振孙的解题，秦氏书原名应为《数术大略》，他说："此书本名数术，而前二卷大衍、天时二类，于治历测天为详，故以置之于此。"[2]这段话明确指出了秦书的名称确实是冠以"数术"二字。陈振孙和秦九韶可能有直接交往关系，他在讲到《纪元历》和《占天历》时说："此二历近得之蜀人秦九韶道古，故存之。"[2]既然能从秦九韶处得到很难找到的历法书，也就有可能亲眼看见秦氏的数学著作。因此，陈振孙的记载无疑是可靠的。

周密系宋元之间人，他的书成于元初，关于秦的事迹是听陈圣观所说，并未亲见秦书，把《数术大略》误为《数学大略》完全可能。这是一种理解。还可以有另外的理解，那就是在秦书的流传过程中有人误写或故意改变书名。由1247年到周密写书的时候相距约四十年左右，在这之前已由原来的《数术大略》变成了《数学大略》，周密所听到的已经是改过的书名，于是就这样写在自己的著

作中。后来的资料，再也见不到有《数术大略》这种名称了，直到明代万历年以前全冠以"数学"二名，而且是"大略"变成了"九章"，即《数术大略》演变为《数学九章》。由《数学大略》到《数学九章》很是自然。至于什么时候演变的，尚未找到明确记载。但是无论如何在明永乐以前就已有了《数学九章》这一名称，显然是在周密以后的一百年间之内。

另外，关于原本的卷数问题，陈振孙说得很清楚，就是九卷，与秦九韶自序所说九类吻合，即每类为一卷。十八卷本的出现年代目前尚未弄清，大约是在元代，最晚不会超过明初。

二、被收入《永乐大典》和入藏文渊阁

秦书问世之后，在一个半世纪内未见有人研究，到永乐时复出。永乐元年到六年（公元1403—1408年）明政府先后调集2169人编纂一套大型类书——《永乐大典》，22877卷，1195册。该书"事韵"类卷16329—16364为算法，秦书分散在各卷。书名为《数学九章》，十八卷。由于这部分《永乐大典》早已被弄到国外，详情无法了解。但是书名和卷数则确切无疑。

明永乐十九年（1421）从南京运到北京一批书，收藏于左顺门北廊，没有完整的书目。后来杨士奇（1365—1444）等奉命将这批书"移贮于文渊阁"，并"逐一打点清切，编置字号，写定一本，总名曰《文渊阁书目》。"正统六年（1441）编完。[4]在这批书中包括《数学九章》一书，注曰："一部三册完全"[5]。未记卷数和版本，根据后来的资料知应为十八卷。版本当为传抄本。书名、卷数与《永乐大典》所收者完全一致，两者是否有关不得而知。由此推知，至迟在永乐年以前流传的抄本就已经是名为《数学九章》，而且是由九卷改为十八卷了。

此后，有人著录和传抄，而且书名和卷数互有异同。由于《永乐大典》本《数学九章》一般人不易见到，后来流传的无疑都是抄

自文渊阁藏本，或再抄本三抄本等。

永乐年以后最先提到此书的是明叶盛（1420—1474），说是“《数学九章》三册”[6]，未说卷数和其他情况，或许指的就是文渊阁所藏的一部，因为两者名称和册数都一致。

此后过了一百多年，文渊阁藏本始被人抄出，这就是王应遴万历年抄本。万历四十四年（1616）赵琦美（1563—1624）有记称：“数书十卷，系赞九章，序东鲁秦九韶所作，而书不著作者姓名，岂即秦九韶所著耶？淳祐七年，宋理宗年号。此书原阁钞本，会稽王云来应遴录得，予借录一过。册元止名《数书》，‘九章’二字，乃王添入。……”[7]这段记载给我们提供了不少重要线索，主要者有三：第一，王应遴抄录了文渊阁所藏的抄本，无疑就是杨士奇所说从南京弄到北京的那个本子。赵琦美又从王应遴处借来王的抄本再抄，就是著名的赵琦美抄本。

第二，关于书名和卷数，只说“数书十卷”，与以前所记均不相同。十卷可能是十八卷之误，由赵琦美脱字或后抄者脱字造成。书名的变化笔者推测有两种可能性：一种是原阁抄本因时间长而失去封面，后来有人加上封面，并根据书的内容便在新加封面上写“数书”二字。一种是王应遴在抄写时写错了，把“数学”误为“数书”。根据赵琦美的记载，前一种可能性更大些。“九章”二字如确为王所加，实与前人偶合，因明代的书很多都加“九章”二字，在王应遴以前至少有四种刊本数学书如此，而秦书又分为九类，序中又有赞《九章算术》之词，王抄录时以意加“九章”二字，便成《数书九章》。这种加字成书名与阁抄本、大典本都无关系。赵琦美到第二年正月再抄完毕，又写后记：“《数书九章》十八卷，宋淳祐鲁郡秦九韶课。会稽王应遴堇父借阁抄本而录也。予转假录之。原无目录，予为增入。”[8]由最后两句话又对阁抄本增加一点新了解，就是没有目录，王照录未加，赵琦美把目录加在书的正文之前。

第三，王、赵都没见过《永乐大典》本。

王抄本后来不见记载，大概很快就失传了。可是赵抄本影响很大，直到清朝中期《永乐大典》本被发掘出来以后还在起重要作用。

赵本后来很长时间不见明确记载，从明末到清初怎样流传一无所知。清初钱曾(1629—1701)在也是园藏书中有"秦九韶《数书九章》十八卷"[9]，书名、卷数都和赵本相同，但是否赵本没有直接证据，从他藏书的情况看有可能是。

在钱谦益(1582—1664)绛云楼藏书中也有秦氏书，"《数学九章》〔九卷，宋秦九韶〕"[10]，没有其他说明，不详出处。从书名和卷数来看，与赵本、大典本都不全相同，这两种本都是十八卷，而钱氏藏本为九卷。估计此本是由原稿本到十八卷本的过渡本。

三、研究《数书九章》的高潮

从乾隆中期起，对《数书九章》的研究打破了过去那种冷冷清清的局面，到乾隆末期形成高潮。一时间，所有数学家几乎都涉及到该书，一些非数学家的学者也插足其间，不仅著录显著增加，而且互相传抄、借阅也成风气。

这种现象的出现，直接导因于《四库全书》的编纂；间接的原因是当时考据学风兴起，出现复古思潮，学者们大都埋头于古代文化遗产的发掘、整理和研究。

清乾隆帝于乾隆三十七年(1772)派人从各省搜访书籍，三十八年(1773)设馆开始编修大型丛书——《四库全书》，到乾隆四十六年(1781)完成第一部，共3503种，36078册①。到五十二年(1787)共抄成七部，分藏于北京、承德、杭州、沈阳等七处。书籍的来源有五种，其中包括《永乐大典》，由戴震(1724—1777)担任辑校工作。戴震从《永乐大典》中辑出《数学九章》十八卷，《四库

① 种数、册数和卷数，各书所记略有出入。

全书总目提要》称："是书分为九类，一曰大衍，以奇零求总数为九类之纲；二曰天时，以步气朔。晷影及五星伏见；三曰田域，以推方圆幂积；四曰测望，以推高深广远；五曰赋役，以均租税力役；六曰钱谷，以权轻重出入；七曰营建，以度土功；八曰军旅，以定行阵；九曰市易，以治交易。虽以九章为名，而与古九章目迥别。盖以古法设其术，九韶则别其用耳。"又说："今即《永乐大典》所载，于其误者正之，疏者辨之，颠倒者次第之。各加按语于下，庶得失不掩，俾算家有所稽考焉。"[11]这就是《四库全书》本《数学九章》的底本，并且把十八卷改为九卷，即人们所说的"馆本"。在收入《四库全书》时也是把十八卷改为九卷。因此，后来凡是根据《四库全书》本抄写的《数学九章》都是九卷的。四库馆臣在乾隆五十二年(1787)所写的"提要"中明确写道："《数学九章》九卷，宋秦九韶撰"，与库本相同。

此时最早研究《数学九章》的是孔广森(1752—1786)，他"少曾师事休宁戴震，因得尽传其学，及官翰林，与窥中秘，得见王孝通《缉古算法》、秦九韶《数学九章》、李冶《益古演段》、《测圆海镜》诸书，由是精研九数，学益大进。"[12]他所窥见的秘本《数学九章》很可能是馆本。在他的著作《少广正负术》内篇中也提到《数学九章》一书。

在孙星衍(1753—1818)的藏书目中有"《数学九章》十八卷〔宋秦九韶撰〕"[13]，未说明来历。从书名和卷数看应为《永乐大典》本的抄本，实际上他"尝佣书都门，适开四库馆，所见书益宏多。又数年释褐入玉堂，充中秘详校官，并获覩翰林院所存《永乐大典》回翔省达者九年，所交士大夫皆当代好学名儒。海内奇文秘籍，或写或购，尽在予处。"[14]由此可知：孙星衍熟知《永乐大典》，并且抄或购了很多秘籍，他收藏的《数学九章》无疑应是抄自《永乐大典》。

《四库全书》本《数学九章》也有人从某些阁中抄出副本，例如周中孚(1876—1831)读过一部从文渊阁抄出来的《数学九章》，九

卷，并冠有"提要"一篇。"提要"即为《四库全书总目提要》。他说："(馆臣)纂为定本，录入七阁，是本即从文澜本写出"[15]，但他未说是谁抄的。

李潢(？—1811)也藏有《数学九章》，张敦仁(1754—1834)借去抄了一部。张说："余宦游江右上交学使李云门先生，借录所藏秦、李诸书，乃得窥寻立天元一、求一之妙。及来吴门有元和诸生李尚之锐笃好斯言，因共日夕讨论，研穷秘奥。官曹多暇，辄依秦氏所说，略加修饰而衍之，得书一卷曰《求一算术》，以篇帙稍繁，分为上、中、下三卷，以究其原。"[16]但是张敦仁未说李潢所藏是什么本子，查李潢曾参加《四库全书》的编修工作，又精通数学，只能是抄自《永乐大典》本，或馆本，或库本之一，馆本的可能性最大。张敦仁所说的李锐(1769—1817)①是当时著名数学家，他们之间的交往甚密，嘉庆十一年(1806)七月二十五日李锐收到张敦仁"信一封并《数学九章》一部、王寅旭遗书一本"[17]。从书名看属于《永乐大典》系统，因未说卷数，也可能是馆本或库本的抄本，从后来的记载知很可能是馆本。

李锐"又从同里顾千里处得秦九韶《数学九章》"[18]。顾千里(1770—1839)即顾广圻，是清代有名学者。可是顾千里的《数学九章》是怎么来的，没有找到明确记载，很可能来自秦恩复(1760—1843)处。顾千里曾为秦恩复校算《数学九章》，他写道："敦夫太史(秦恩复)校其家道古数书开雕，属文焘(顾千里)为之覆算。其题问与术草不相应，或术与草乖甚，且草数有误，则当日书成后未经亲自覆勘耳。"[19]这里说的是秦恩复家藏有《数学九章》，他自己进行了校正，准备刊刻出版，又请顾千里覆算。在覆算过程中，顺便抄了一部，又被李锐得到。秦恩复又是怎样获得的？是哪个系统的本子？都不清楚。秦恩复也未刻成。

由上所述可知，李锐至少见过两种不同系统的《数学九章》抄

① 过去人们对李锐的生年有1767、1768、1773三种说法，近郭世荣根据李锐《观妙居日记》断定为1769年，此说为是，今从之。

本。他和焦循(1763—1820)、汪莱(1768—1713)等互相讨论过这部书。[20]焦循因此撰《大衍求一术》一卷，并附有《求一古法》，有稿本流传，现藏北京大学图书馆。

当时在许多书上记载了《数学九章》一书，研习者除上述诸人外还有骆腾凤(1770—1841)等。

万历末年赵琦美抄本，到开四库馆的时候还存在，因而被发掘出来，落到了张敦仁手里，此后才为人们所知。

四、刊刻出版的经过

《数学九章》从《永乐大典》辑出，收入《四库全书》之后，引起了人们极大的兴趣，但是经过了半个世纪以上才被刊刻出版。这部书能够出版，毛岳生(1791—1841)、宋景昌和郁松年三人起了决定性的作用。毛岳生大力搜集该书的各种抄本和校本；宋景昌以赵琦美抄本为主进行详细校对；郁松年主持刊刻。关于这件事，郁松年有较详细的记述："余既刻《清容剩源》二集，益思得宋元人秘笈。毛君生甫(毛岳生)为予言：秦道古《数书九章》思精学博，若大衍求一、正负开方两术尤为阐自古不传之秘。第其书，转相抄录，讹脱滋多。元和沈广文(沈钦裴)曾得明人赵琦美抄本于阳城张太守(张敦仁)家；订讹补脱，历有年所，以老病未卒业。其弟子宋君景昌，能传其学。余因属毛君索其原本，会广文病甚，不可得，得其副于武进李太史(李兆洛)家。毛君又出其家藏元和李茂才(李锐)所校四库馆本，并属宋君为之雠校。嗣广文没，宋君又于其家搜得秦书刊误残稿数卷，于是以赵本为主，参以各本。其文字互异，义得两通者存其旧；其传写错落，无乖算术者随条改正；其术草纰缪，或误后学者采众说而折衷之。"于是完成《数书九章札记》四卷，"以资考证"[21]。经过宋景昌校勘的《数书九章》和所撰《札记》，一并收入郁松年编的《宜稼堂丛书》中，这是第一次刊印出版。

上面的记载和与其有关的情况，还应作若干说明，主要者如下：

第一，搜集和流传。流传在这里所涉及的有两个系统的本子，一是赵本，一是馆本。赵本落到张敦仁手中，可能是张晚年，因为早期和李锐等人的交往中和自己的记载中都未提到此本，书名是《数学九章》，而不是《数书九章》。大约在张敦仁死后，赵本为沈钦裴所得，并且进行了"订讹补脱"工作。李兆洛(1769—1841)收有赵本的抄本，这个再抄本为毛岳生所得。李锐校对的馆本也落到毛岳生家。毛把这两个本子都交给了宋景昌。沈钦裴死后，其所藏赵本和"刊误残稿数卷"也为宋景昌所得。因此，在宋景昌手中至少有三个以上的秦书抄本，包括馆本和赵本两个系统。这为宋景昌的校对提供了有利条件。

第二，校对。宋景昌"以赵本为主，参以各本"，进行了详细校对和刊误。所谓"各本"实际就是上述两个系统的本子，《数书九章札记》中所引用的主要是馆本，但也参考了沈钦裴的工作，引用了沈的许多看法或表示了不同的意见。李锐的校对成果和毛岳生的一些见解，宋景昌也多有采纳。可以说宋景昌的工作是在沈钦裴、李锐和毛岳生等人工作的基础上进行的，他的工作比前人完整而且得到了公开出版的机会，因而为后人所知。

第三，书名和卷数。由于宋景昌的校对以赵本为主，其他本子只作参考，所以保留了赵本的原貌，书名和卷数都和赵本相同。书前和书后有赵琦美的两段简短记述，书末加了一篇未署名的考证性文字。书前也有目录，当然是赵本原有的。

总之，《宜稼堂丛书》本《数书九章》脱胎于赵本，并且成为以后各本的母本。流传很广。至于赵本后来的下落不清楚，清末陆心源(1834—1894)看到一部"旧抄本"，跋曰：《数学九章》十八卷，题曰：鲁郡秦九韶旧抄本。"[22]显然是属于赵本系统，但是否为赵本本身无法断定。

1842年，《数书九章》出版后，一方面很多人从事大衍求一术的

研究，另一方面也有人对《宜稼堂丛书》本进行校勘，其中代表者为邹安鬯，他"尝以郁（松年）刻秦道古《数书九章》谬讹错出，演算不易，故用力尤勤，而辩正为多，有沈（钦裴）、李（锐）、毛（岳生）诸家所未及者，窃拟编次其说，为《数书校议》一册。"[23]光绪二十四年（1898）刘铎把邹校本《数书九章》连同宋景昌的《札记》收入所编石印《古今算学丛书》中，是为秦书的第二个印本。

本世纪三十年代出版的《丛书集成初编》和《国学基本丛书》中都收入秦书的宜稼堂本。

现在人们最容易见到的就是这四种印本。最近台湾省出版了全套《四库全书》，其中的《数学九章》也被印出，从而增加了新的本子。

五、几部现存的抄本

除了上述的印本《数书九章》外，还有些抄本流传至今。抄本可分两大类，其一是国家抄本，如《永乐大典》本和《四库全书》本；其二是民间抄本。前者还都存在，不予论述，这里主要讨论一下民间的抄本。但民间到底有多少抄本流传到现在，实在不好调查，只好就现在所知者予以简述。

解放前中法大学图书馆藏有"精抄本"一部[24]，后来不知去向。

李俨（1892—1963）收藏有一部，是传抄《四库全书》本，六册，有朱、墨、蓝笔校字和眉批[25]。他去世后，和其他藏书一起由其家属全部赠送中国自然科学史研究室（今中国科学院自然科学史研究所前身），保存至今。笔者未亲见此书，具体情况不太了解。

北京大学图书馆藏有一部抄本《数书九章》十八卷，四册，红格，有少数眉批和校正，也有用红笔修改的地方，与馆本对照相校多处。前后有赵琦美的简记和跋，末有周密《癸辛杂识续集》下关于秦九韶事迹的记载和未署名的跋（可能是焦循写的）。通观全

书，非焦循所抄，馆内认为系傅椽抄。这部书上有"李盛铎印"、"木斋"等印，木斋是李盛铎的字，他是我国现代著名学者和藏书家，死后藏书归北京大学图书馆。在目录页上有大量批语，主要是和馆本目录的对照。因为此本一般不易见到，故将其列下，供研究者参考，为便于印刷把批语写在卷次之下(和原来的次序是颠倒的)，而且不列原本之目录内容。

一卷：一卷馆本作卷一上。推计土功馆本入卷一下。

二卷：二卷馆本作卷一下。分槩推原馆本入卷一上。

三卷：三卷馆本作卷二上。

四卷：四卷馆本作卷二下。

五卷：五卷馆本作卷三上。均分梯田本馆入卷三下。

六卷：六卷馆本作卷三下。漂田推积馆本入卷三上。围田先计馆本入卷七下。

七卷：七卷馆本作卷四上。

八卷：八卷馆本作卷四下。表望馆本作远望，远望古(方？)城、遥度圆城馆本均入卷四上。古池推圆馆本入卷三上。

九卷：九卷馆本作卷五上。

十卷：十卷馆本作卷五下。围田租亩馆本入卷五上。筑堤均劳，馆本劳作功入卷七下。户田馆本作户税。移运均劳馆本入卷八下。

十一卷：十一卷馆本作卷六上。算回运费馆本入卷六下。

十二卷：十二卷馆本作卷六下。囤积量容馆本作方圆同积，积仓知数馆本作寄仓知总，均入卷九上。推知余数、累收库本馆本均入卷九下。分定纲解馆本作均定合解，与米谷粒分均入卷五下。

十三卷：十三卷馆本作卷七上，此卷四条馆本均入卷七下。

十四卷：十四卷馆本作卷七下，首三条(引者按：指计作清台、堂皇程筑、砌砖计积)馆本均入卷七上。竹围芦束、积木计余馆本均入卷九上。

十五卷：十五卷馆本作卷八上。

十六卷：十六卷馆本作卷八下。圆营敷布馆本入卷八上，望知敌众馆本入卷四下，均敷馆本作均赋。

十七卷：十七卷馆本作卷九上。市物馆本作市易〔前叙系作市易〕。推原物价、均货推本馆本均入卷九下。互易推本馆本作易牒知原，叙粟互易馆本作粟米交易，均入卷六下。

十八卷：十八卷馆本作卷九下。推计互易馆本作计米易麴，炼金计直馆本作三合均价，馆本均入卷六下。推求本息、僦直推原馆本均入卷六下。

这些批语和宋景昌《札记》中所引馆本的目录完全一致，而语句不同，它们之间没有转抄关系。抄本十八卷的目录与《宜稼堂丛书》本《数书九章》的目录也全同。

根据以上的情况来看，北大的抄本《数书九章》肯定是属于赵本系统，抄于何时很难断定，眉批和校勘显然是在馆本之后。

北京图书馆藏王萱龄抄本，书名为《数学九章》，九卷，无目录，题"宋秦九韶撰"，与库本署名相同。从书名、卷数、作者题法三者和没有赵琦美记与跋来看，此抄本属馆本系统。在卷一封面上写有两行毛笔字："王北堂征君写定，龚自珍题检"，龚自珍(1792—1841)是我国十九世纪前期著名思想家，书的抄写时间当为在他去世之前。书上有"昌平王氏北堂藏书"、"王氏北堂"、"中秘写官"、"北京图书馆藏"等印，可见王萱龄(北堂)收藏了自己的抄本。书前录有《钦定四库全书提要》中关于《数学九章》的"提要"，还有一篇王萱龄写的《数学九章考证》。此书的底本是李锐校本，在抄写过程中，王萱龄参考了李锐所加按语和眉批。北京图书馆定为李校本的临抄本。

根据以上所述，我们对《数书九章》的流传情况可归纳为以下几个问题：

1．稿本叫《数术大略》，九卷，应是每一大类问题为一卷。

2．大约在元代有人改书名为《数学九章》，又有人由九卷改

为十八卷。

3. 明初把十八卷本收入《永乐大典》，另有十八卷本藏于文渊阁。两本均名《数学九章》，显然是来源于一个母本。

4. 明代流传的主要是文渊阁本，王应遴传抄时定名为《数书九章》，赵琦美再抄时沿用此名，赵本流传到清代。

5. 清代编《四库全书》时，用书名《数学九章》，卷数复为九卷。

6. 经宋景昌以赵本为主进行校订，用赵本书名和卷数，并收入《宜稼堂丛书》，是为第一次出版。

7. 郁安甡对宜稼堂本又进行校对，校对本收入刘铎《古今算学丛书》，是为秦书第二次印刷。

8. 本世纪三十年代《丛书集成初编》和《国学基本丛书》都依据宜稼堂本排印收入。

9. 由于修订过的赵本被四次印刷出版，因此流传甚广，有绝对的影响，一般人很少了解其他情况。

10. 目前存世的本子大体可分为三大系统，即《永乐大典》本（《数学九章》十八卷）、四库馆本（《数学九章》九卷）和赵本（《数书九章》十八卷），共有抄本约十一部，刊本一种，石印本一种，铅印本二种，影印本一种，缩微胶卷约三卷。

需要指出的是：目前广泛流传的赵本系统的各种本子与秦氏原著差别较大，就是说不是本来面貌，特别是书名和卷数与原著不符。署名基本与原著一致。馆本复原了卷数，保留了大典本的书名，但是把署名改为"宋秦九韶撰"，而不是"鲁郡秦九韶撰"。为此，笔者希望恢复秦书的原貌，应为《数术大略》九卷，题"鲁郡秦九韶道古撰"，九卷按其自序来划分，即他自己所说的"厘为九类"：大衍第一、天时第二、田域第三、测望第四、赋役第五、钱谷第六、营建第七、军旅第八、市易第九。

为了使读者比较简明地了解到《数术大略》的流传情况，绘制一幅新的流传图，其中包括现在该书的收藏情况。

《数术大略》稿本九卷
(1247)
陈振孙
所见本
《数学九章》九卷本
《数学九章》十八卷本
南京藏本
《永乐大典》本
(1408)
北京文渊阁
(1421)
叶盛(1420—1474)
所见本
王应遴抄本
赵琦美(1563—1624)
抄本
秦恩复(1760—1843)
抄本
钱谦益(1582—1664)
《四库全书》本
(1787)
孙星衍
(1753—
1818)
抄本
李潢(?—1811)
抄本
钱 曾
(1626—1701)
四库
馆本
孔广森
(1752—
1786)
所见本
顾千里(1770—1839)
抄本
张敦仁
(1754—1834)
焦循(1763—1820)
藏本
李锐(1768—1817)
校本
抄文澜阁本
沈钦裴
李兆洛(1769—1841)
抄本
王萱龄
临抄本
周中孚
(1768—1831)
宋景昌
毛岳生
(1791—1841)
传抄本
李盛铎
《宜稼堂丛书》本
(1842)
李 俨
(1892—1963)
邹安鬯校本
《古今算学丛书》本
(1898)
《丛书集成初编》本
(1936)
《国学基本丛书》本
(1936)
北京图书馆
剑桥大学
图书馆
台湾影
印本
北京、兰州
台北、杭州
…
自然科学史
研究所
许多图书馆
许多图书馆
许多图书馆
许多图书馆
许多图书馆
北大图书馆

参 考 文 献

〔1〕U. Libbrecht, Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, 1973, London, P. 36。

〔2〕陈振孙：《直斋书录解题》卷十二"象纬类"。

〔3〕周密：《癸辛杂识续集》卷下。

〔4〕杨士琦：《文渊阁书目》卷前题本。

〔5〕同〔4〕卷十四。
〔6〕叶盛：《菉竹堂书目》卷五。
〔7〕载于现传印本《数书九章》秦九韶自序之后。
〔8〕载于现传印本《数书九章》末。
〔9〕钱曾：《也是园书目》卷一。
〔10〕钱谦益撰、陈景云注：《绛云楼书目》卷二。
〔11〕《四库全书总目提要》卷二十。
〔12〕罗士琳：《续畴人传》卷四十八"孔广森"。
〔13〕孙星衍：《孙氏祠堂书目内编》卷三。
〔14〕孙星衍：《孙氏祠堂书目序》(嘉庆初年)。
〔15〕周中孚：《郑堂读书记》卷四十五。
〔16〕张敦仁：《求一算术》自序(1803)。
〔17〕李锐：《观妙居日记》，稿本第二册。
〔18〕罗士琳：《续畴人传》卷五十"李锐"。
〔19〕顾千里：《思适斋集》卷十。
〔20〕罗士琳：《续畴人传》卷五十一"焦循"。
〔21〕郁松年：《数书九章札记》序(1842)。
〔22〕陆心源：《仪顾堂题跋》卷八。
〔23〕华世芳：《近代畴人著述记》。
〔24〕邓衍林：《北平各图书馆所藏中国算学书联合目录》，1936，第187页。
〔25〕《李俨收藏中算书目录》，1957，油印本，第4页。

宜稼堂本《数书九章》正误

沈 康 身

自《周髀算经》以来，我国数学专著都立论谨严，极少差错。《数书九章》系秦九韶独立完成，所言算题论数量、论质量在中世纪数学著作中允称第一流。但其中有不少错误，除缮抄、刊印传误外，是秦氏未及深究所致，是为美中不足之处。清代学者曾为认真订正。至道光二十二年(1842年)上海郁松年以沈钦裴、宋景昌师徒所考订过的明代万历年间赵琦美抄本为主、并参照李锐校订过的四库全书馆本等为蓝本，由宋景昌再次雠校："其文互异，义得两通者存其旧，其传写错落无乖算术者随条改正，其术草纰缪，或误后学者，采众说而折衷之。"宋景昌还著有《数书九章札记》四卷以抒己见。经宋氏工作，始有今传本：宜稼堂本《数书九章》。然而此传本仍有不足之处。本文提出某些看法。本文第一部分以题为次序论述(I2指《数书九章》卷1第2题，余仿此)，第二部分为正误表(第1部分已论述过的不录)。

一、分题正误

I2 古历会积

题文据古历推算上元积年说："淳祐丙午十一月丙辰朔，初五日庚申冬至，初九日甲子。欲求历过……年数。"这就是说，已知公元1246年11月朔在甲子日后53天，冬至在甲子日后57天，求上元积年，原题术文、草文相当于设上元以来所过天数的甲子周期数为x，据题文刊出同余组为$x\equiv4\left(\bmod 365\frac{1}{4}\right)\equiv8\left(\bmod 29\frac{499}{940}\right)$。

经过变换，“通数”化为“元数”后得 $940x\equiv7520\ (\mathrm{mod}\ 27759)\equiv 3760\ (\mathrm{mod}\ 343335)$。其中最大公约数(27759，343335)＝1461，而1461不能整除(7520－3760)，我们知道原同余组无整数解。宋景昌在《札记》[1]中有鉴及此，因此说：“今以八日为朔不及，四日为气(冬至)不及，于率不应有此数，故推之不合。……此二数既误，余数无是者矣。”沈钦裴另拟数据改正题文[2]，载《札记》。

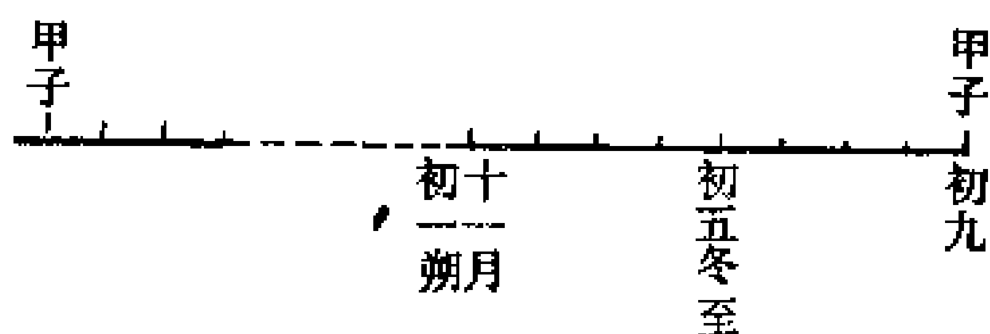


图 1

沈钦裴改正题文后，当解至步骤：

$$x=1373340N\equiv126900\ (\mathrm{mod}\ 225600)$$
$$\equiv87660\ (\mathrm{mod}\ 111036)$$

按照孙子定理，应求 F_1，F_2 使

$$9253F_1\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 225600),\quad 225600F_2\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 9253)。$$

用大衍求一术求得　$F_1=172717$，$F_2=2169$

所求　$x\equiv9253\times172717\times126900+225600\times2169\times87660$

$$=1598150401\times126900+489326400\times87660$$
$$=288593990334900$$
$$\equiv1531274100\ (\mathrm{mod}\ 2087476800)$$
$$N=1531274100\div1373340=1115$$

按秦九韶用语1598150401为“纪用”，489326400为“朔用”。沈钦裴解题至最后说：“纪用五亿五千四百四十一万二千一……，朔用五亿四千九百三十三万六千……满衍毋二十亿八千七百四十七万六千八百去之，余一十五亿三千一百二十七万四千一百为所求率

---

① 《札记》指宋景昌《数书九章札记》，下同。

② 见本书“《数书九章》中的天文问题”第5节。

实，如气分一百三十七万三千三百四十而一，得一千一百一十五为历过”结果正确，但“纪用”554412001≡112801(mod225600)，“朔用”549336000≡3896(mod9253)与“用数”的定义不符。这是沈钦裴的失误处①。

I 3　推计土功

(1) 题文有四个“元数”：54，57，75，72。草文引用“大衍总数术”：“以复数求总等，得三寸，以约三寸多者，不约其少者。甲得五十四，乙得一十九，丙得二十五，丁得二十四。”这里多、少应理解为四个“元数”中3幂次的大小，既然保留的是$54=2\times3^3$，其余三个“元数”3的幂次都低于3。因此这里术文中应是：“以约三寸少者，不约其多者。”

(2) “大衍总数术”对于有公约数的“元数”求定母步骤有三：①“以诸数求总等，存一位(本题存54)，约众位，始得元数。”②“两两连环求等，约奇弗约偶，约偶弗约奇。”本题(24,25)=(24,19)=1，而24=4×6，54=9×6，应该约奇弗约偶

$$\{54,\ 19,\ 25,\ 24\}=\{9,\ 19,\ 25,\ 24\}$$

③“诸数皆不可尽类，则以诸元数命曰复数，以复数格入之。”具体做法是：“而犹有类数存者(指(9，24)=3≠1)，又相减，以求续等(指9，24之间求最大公约数3)。以续等约彼(指24÷3=8)则必复乘此(指9×3=27)，乃得定数(指27，19，25，8)。”

就本题说定母已求得。但是就一般说，有公约数的“元数”照这三个步骤运算不能保证能得到正确结果，Ⅱ3“程行相及”就是一个反例。

Ⅱ 2　程行计地

“元数”是300，240，180。按照“大衍总数术”理应“以诸数求总等(60)，存一(300)，约众(得4、3)。”接着草文就“名为元数，连环求等”将得到错误结果：1200，所以《札记》引李锐的见解说，“存一

① 见沈康身：“《数书九章》中的数论命题”，杭州大学学报(自然科学版)，1986，第4期。

约众后，即求续等”，“云：名为元数，连环求等者，于算不合也。”

Ⅱ3 程行相及

（1）题文大意是：“甲、乙、丙三人日行速度依次是300，250，200里。丙出发后2天使乙赶丙，乙出发后$\frac{1}{2}$天使甲赶乙。已知三人同时到达目的地。问出发点与目的地相距多少里？”答案说两地相距3000里。

我们知道丙、乙相遇应在出发后10天，丙、甲相遇在丙出发后7.5天，而乙、甲相遇在丙出发后5天，如果三人按原速继续直线前进，他们不能同时相遇①，因此题文、答数都错。黄宗宪《求一术通解》引此题后注文也说：“按原题矛盾已甚，今改之。”他改题文数据为：“丙出发盾已甚，今改之。”他改题文数据为：“丙出发后三天使乙赶丙，乙出发后二天使甲赶乙”才能在3000里外三人同时相遇。而且对原题术文“以均输求之，大衍入之”批评说：“是编专言大衍，无庸杂人均输。”黄宗宪也理解到此题实在是求三个整数周期的公共周期x，使

$$x\equiv0(\mathrm{mod}300)\equiv0(\mathrm{mod}250)\equiv0(\mathrm{mod}200)。$$

（2）对三个“元数”求定母时，由于300，250，200有“总等”50，于是保留250不约；300，200依次约为6，4。草文对三数6，250，4求续等，所得三数为3，125，16，三者虽两两互素，但

$$3\times125\times16=6000\neq\{300,\ 250,\ 200\}=3000,$$

而且16不能整除200，再一次说明“大衍总数术”对有公约数的“元数”求定母是不可靠的。

Ⅱ4 积尺寻源

（1）原题题文八个元数：130，120，110，100，60，50，25，20，有公约数，理应“以诸数求总等，存一位”“连环求等”后约简，

---

① 我们设丙出发后t天三人同时相遇，则

$$\begin{cases}200t=250(t-2)\\200t=300(t-2.5)\end{cases}$$

矛盾方程，无解。

再求“续等”。原题八个元数如果存100，50或25，约其余各数得到正确定母；而存其他五数，都得到错误结果。

(2) 在计算八个同余式的“用数”时，使用“借数”时，误用“等数”①，对结果虽没有影响，于理不合，所以李锐对此批评说：“其数虽合，于率不通。”

Ⅲ1　推气治历

从庆元四年(1198年)至绍定三年(1230年)冬至时刻，用比例算得嘉泰甲子(1204年)冬至时刻是在甲子日后11.38208180日②。但紧接后面一题“治历推闰”又说同年冬至在甲子日后11.446154日，前后矛盾，使读者迷惑不可解。

Ⅳ1　揆日究微

本题附有临安府晷影图③。影长精度到分，数据当来自实测。在草文中却又重新计算，从夏至、冬至实测数据分别推导出小暑、大暑、立秋三个节气日正午影长。这种推导既无必要，而所用公式又毫无根据。所以宋景昌在《札记》引四库全书馆本按语(李锐作)云：“各节气影长皆当时实测所定，本不待求。今所设求法，乃故为溟涬，使人不可解也。细查其数，首以象限加十一度余为法，以除影差。问数自乘为节率……。节率乃强取之数。……数家设术误人，往往如此。”对此有严厉批评。

Ⅳ3　圆罂测雨

题文大意是圆罂(状如图2)积雨水已知深h，折算平地深多少(x)？这应先求圆罂中深h的水容积

$$V=\frac{\pi}{12}\left[\left(d^2+c^2+dc\right)\left(h-\frac{H}{2}\right)+\left(c^2+b^2+cb\right)\cdot\frac{H}{2}\right]$$

其中
$$d=\frac{aH+2(c-a)(H-h)}{H},$$

---

① 见本书“《数书九章》中的数论问题”第4节。

② 见本书“《数书九章》中的天文问题”第2节。

③ 见本书“《数书九章》中的天文问题”第3节。

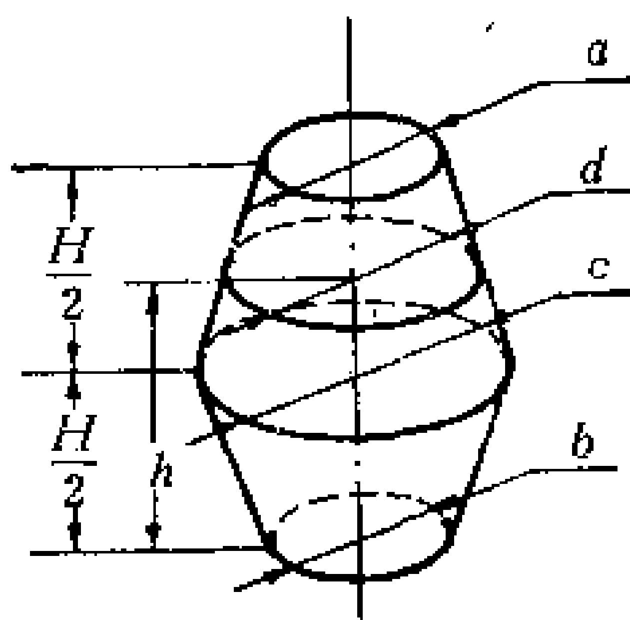


图 2

而

$$x = V \div \frac{\pi}{4}a^2$$

$$= \frac{1}{3a^2}\left[(d^2+c^2+dc)\left(h-\frac{H}{2}\right)+(c^2+b^2+cb)\frac{H}{2}\right]$$

原题术文、答文俱误。所以四库全书馆本就批评说："法、实皆当用圆幂或皆用方幂，今以圆幂乘实，方幂乘法（指式中$\frac{\pi}{4}a^2$缺写$\frac{\pi}{4}$），法实皆不同类，一误也。""于上体，只并三幂，未以高乘（指式中 c^2+b^2+cb之和缺乘$\frac{H}{2}$），二误也。"又说："此问平地雨深，无关圆法，密率句赘（指求x时与π无关）。"

如以题文数据代人求x式内，

$$x = \frac{1}{3\cdot(10.5)^2}([(19.5)^2+(24)^2+(19.5)(24)]\cdot 4$$

$$+[24^2+8^2+(24)(8)]\cdot 8) = 37\frac{461}{1323}(\text{寸})①$$

题原答 1尺$8\frac{64483}{74058}$寸误。

宋尺合公制30.9～32.9厘米，按题文如指一次降雨纪录，合

① 程廷熙校算结果$35\frac{920}{1323}$寸，误。见"秦九韶雨深雪厚例解的讨论"，《数学通报》，1963年第1期。

公制115.4－112.8厘米，这显然是脱离实际的[①]。

Ⅳ5　竹器验雪

题文大意是说竹箩(状如图3)积雪已知深h，折算平地雪深(x)。我们知道箩内共雪

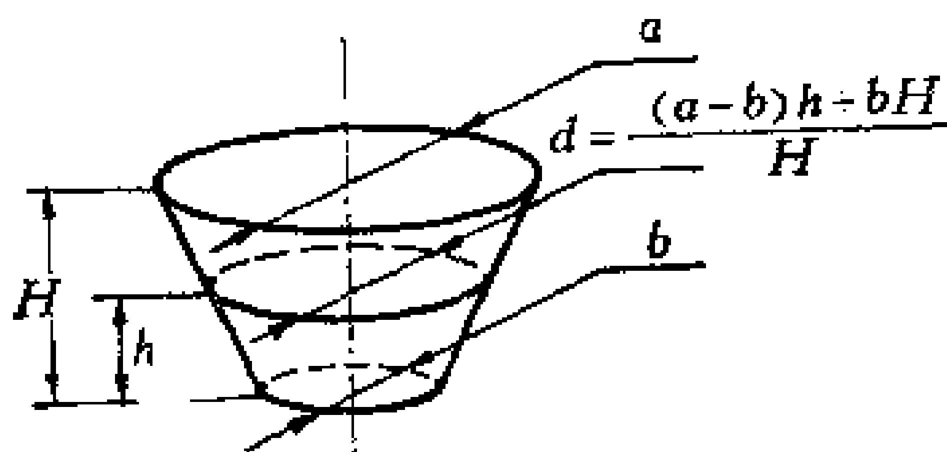


图　3

$$V=\frac{\pi}{12}\{bH[(a-b)h+bH]+(bH)^2+[(a-b)h+bH]^2\}h/H^2,$$

而

$$x=\frac{1}{3(aH)^2}\{bH[(a-b)h+bH]+(bH)^2+[(a-b)h+bH]^2\}h$$

原题术文、答文俱误。四库全书馆本批评说："此法意不可见。"沈钦裴也说："此术于率不通，答数亦误"并改正术文，义同上列x的表达式。把题文数据代入，算得

$$x=\frac{1}{3\cdot(28\cdot18)^2}\{9\cdot18[(28-12)9+9\cdot18]+(9\cdot18)^2+[(28-12)9+9\cdot18]^2\}9$$

$$=6\frac{5549}{6936}(\text{寸})。$$

Ⅵ　围田先计

① 1951—1980年杭州地区全年平均降水量为139.9厘米，三十年间全日最大降水量是18.9厘米。

为算出农田排水①溪流水田升高数，秦九韶立术说："遏出水以八节乘之为实，以溪阔乘流长，又乘岁日(每年天数)为法，除之为溪面泛高。"这就是

溪面水升高＝排水量×8÷[排水溪面表面积(溪阔×溪长)×365]

这一公式缺水力学理论或经验根据，因此借以算得的结果显然是错误的。

Ⅶ　**望山高远**

此题题文义同《海岛算经》②，术文也按《海岛算经》办法(如图4)，以题设数据代人：

$$y=\frac{(h-k)(d+a-b)}{b-a}$$

算得山高为20里半又$\frac{3}{5}$步。而《海岛算经》在测量时"人目着地"，

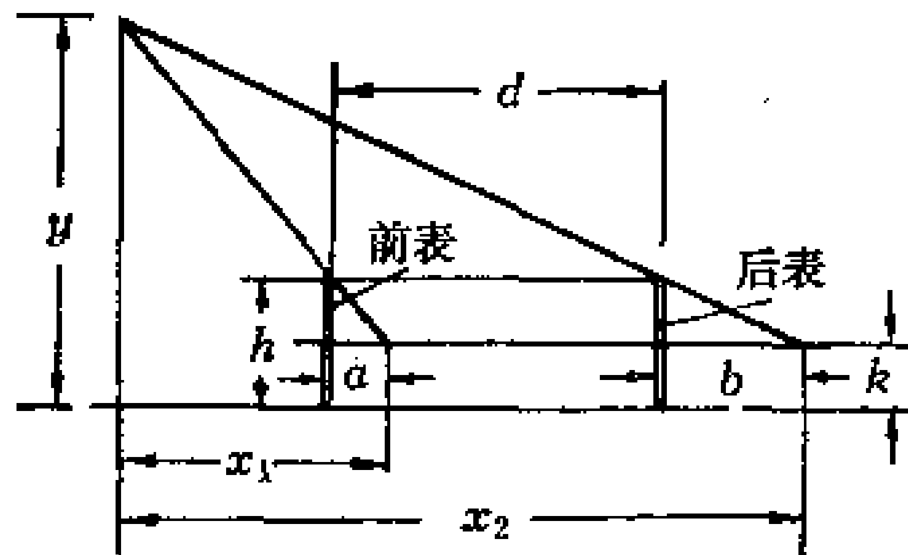


图　4

秦题题文则人目高五尺。因此四库全书馆本案："此系人目上之山高，若加人目高，则多一步(5尺)。"又此题文所拟山高脱离实际，超过世界最高峰——我国珠穆朗玛峰(海拔8848.13米)。

① 见本书"秦九韶与土木建筑学"一文第7节。

② 吴文俊："《海岛算经》古证探源"，《九章算术与刘徽》，北京师范大学出版社，1982，162—180页。

原术文求山远术文、答文俱误①，沈钦裴已为改正。据刘徽《海岛算经》，山去前表距离相当于说：

$$x_1=\frac{ad}{b-a},$$

而本题题文要求山去后表距离，应是：

$$x_2=\frac{ad}{b-a}+d+b=\frac{b(d+b-a)}{b-a},$$

依题文数据代入：$x_2=35$里$239\frac{13}{50}$步。

Ⅶ3　陡岸测水

题文大意是在陡岸(AB)通过测得数据a、b、c、d算出河宽x_2(图5)。术文据《九章算术》句股章已知法则，从相当于

①$(x_1+x_2):(c+d)=b:a$,

②$a:c=b:x_1$,

解得　$x_2=\frac{bd}{a}=238$(尺)，

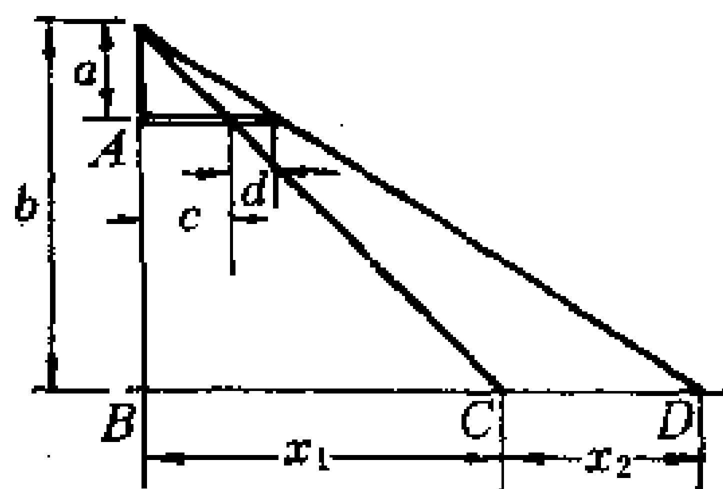


图　5

而原答文误为234.6尺。其错误原因正如李锐校文云："按测望诸线皆合于人目之一点，其高正自人目计之。今减去人目至矩(a)，自矩计之，不得其理矣。"即秦氏又误以矩与水面距离($b-a$)取代人目至水面距离(b)。

Ⅷ1　表望分城

题文大意是在点A处测望方城(图6)。从测得数据a、b、c、d，仿照《九章算术》句股章第22题立四表连索法作间接测量。但秦氏误用公式，相当于说：

$$\frac{a(a-c)}{c-b}=12\text{里}320\text{步},$$

$$\frac{a(a-d)}{c-b}=9\text{里}320\text{步}。$$

① 见本书：白尚恕，"秦九韶测望九问造术之探讨"。

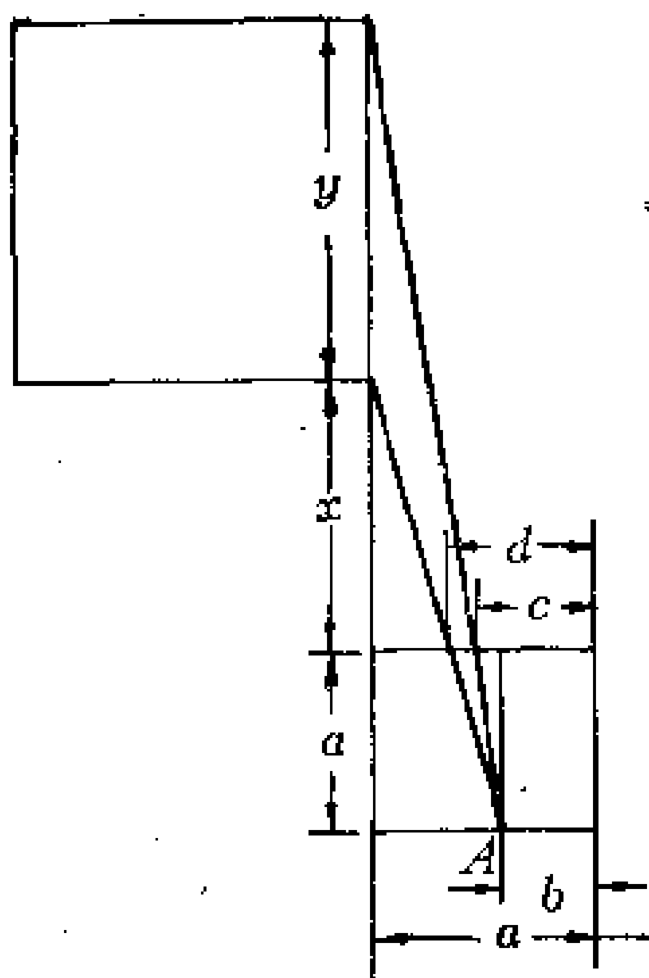


图 6

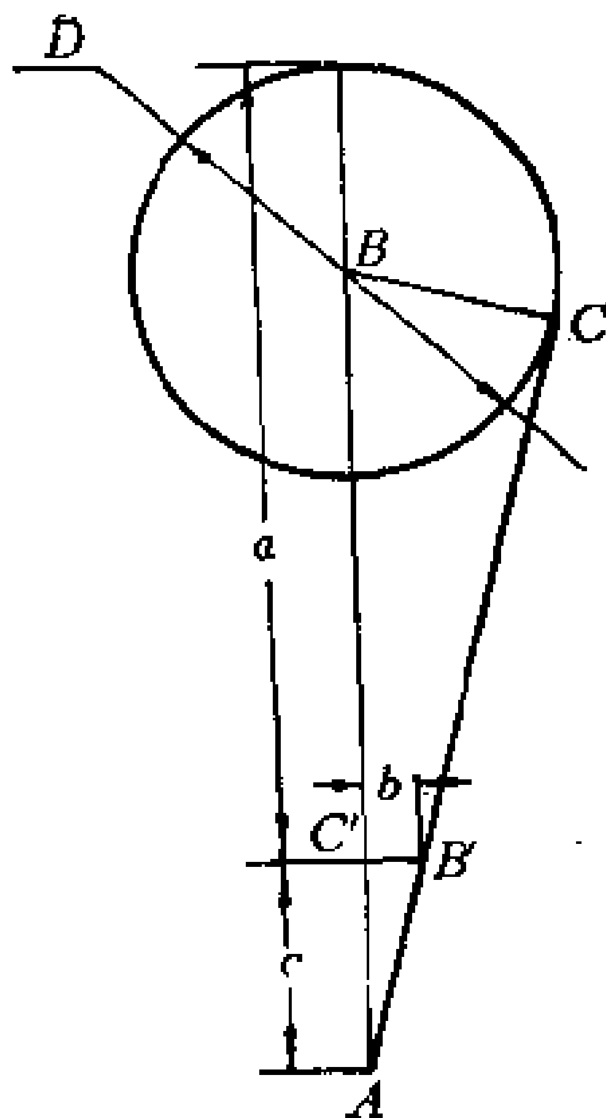


图 7

四库全书馆本已指出："答数皆误。"宋景昌《札记》据题意改术文，相当于说：

$$x=\frac{a(a-d)}{d-b}$$

$$y=\frac{a(a-c)(d-b)-a(a-d)(c-b)}{(c-b)(d-b)}$$

以题文数据代入，所得答案是$x=1$里$99\frac{11}{31}$步，$y=11$里$220\frac{20}{31}$步。

Ⅷ3　望敌圆营

题文大意：在A处测量敌营(图7)，测得a、b、c三项数据，求敌营直径(D)。原题术文误以为D是四次方程的解：

$$-\left(\frac{c^2-b^2}{4}\right)^2D^4+\left(a^2b^2\cdot\frac{b^2+c^2}{2}\right)D^2-(a^2b^2)^2=0,$$

宋景昌《札记》说："此术开方，廉(D^2系数)，隅(D^4系数)误，故答数不合。然立术已误，虽开方不误，仍不合也。"《札记》改正术文，相当于从相似句股$\triangle ABC$，$\triangle AB'C'$导致二次方程

$\frac{c^2}{4}D^2+b^2(a+c)D=b^2(a+c)^2$。用题设数据代入，解得 $x=714\frac{5004}{5131}$(步)。

Ⅷ6　表望浮图

题文大意是在A处测望浮图(塔)，从已知数据a、c、e计算塔身高x，相轮高y和塔心木高z。我们知道相轮高$y=\frac{(a+c)e}{c}$，但术文误为$\frac{ae}{c}$。所以四库全书馆本案："相轮高、塔身高、塔心木俱误，相轮高四丈五尺。"按即 $y=\frac{(a+c)e}{c}=4.5$(丈)。

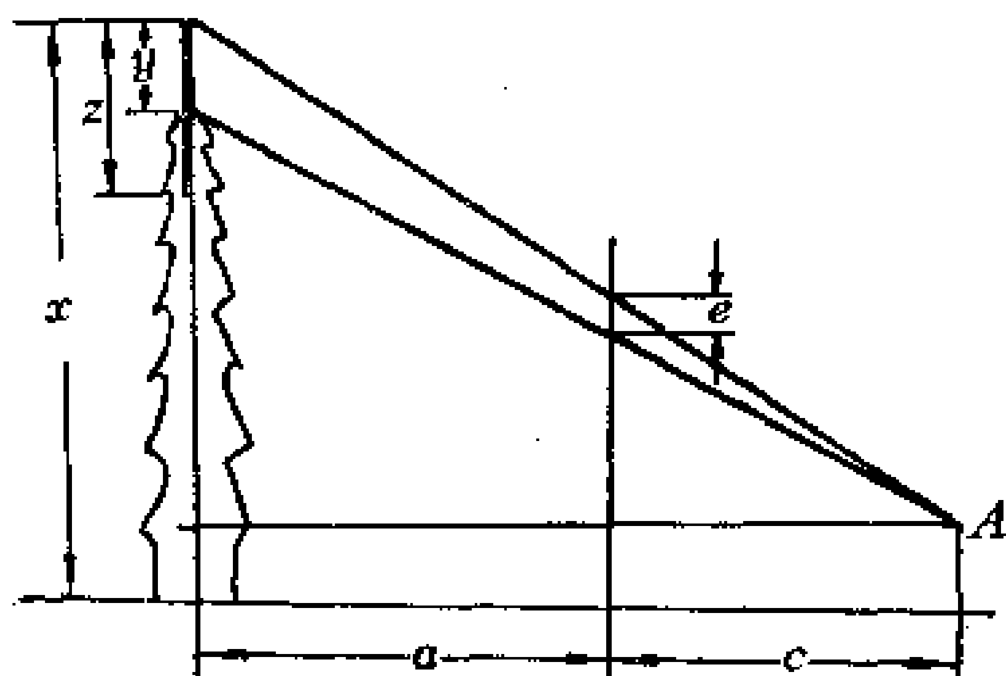


图　8

ⅩⅣ　计作清台①

(1)　全台用砖数

高台既有砖砌峻道三段、平道二段，其台基面积也应随之扩

① 见本书"秦九韶与土木建筑学"一文第2节。

展，所以宋景昌在《札记》说："转道东西加二层、余三面各加一层"是正确的，因为此高台土心经砖包后，又加砌上下交通用盘道，台基实际尺寸应是：

宽：16.2＋3×0.6＝18(丈)，

长：18.2＋2×0.6＝19.4(丈)。

秦九韶所算砖包壁用砖数是对的，他计算上底为6.2×8.2，下底为16.2×18.2，高为12，与上底5×7下底15×17高为12的二刍童体积之差为343.4504(立方丈)，然后除以每块砖体积，得砖数。而其盘道砖壁计算有误，我们推算如下：

南平道下砖壁为一梯形：上底14，下底18，高5.2，面积为83.2(平方丈)。

北平道下砖壁梯形：上底9.88，下底16.8，高9.75，面积为130.07(平方丈)。这二块梯形面积加上三峻道下砖壁面积合共513.89(平方丈)，各砖壁都厚六尺，可计算砖壁体积合共308.334(立方丈)。合并砖包壁体积得总和651.7844(立方丈)，除以每砖体积0.18立方尺，得全台用砖数为36210244(片)。原答文说用砖3142024片，又《札记》说用砖$3410385\frac{5}{9}$俱误。

(2) 石脚用石数

题文原意砌砖下全部用七层石板为基，但演草有误，只用石4317(片)。《札记》改正说："转道东西加二层、余三面各加一层"并计算石脚框平面积为

$$18\times19.4-15\times17,$$

乘上七层石共高，又以每片石体积除，得用石总数为6594(片)。

二、正 误 表

误文（图）	宜稼堂本 甲种① 卷	甲种① 页	甲种① 面	甲种① 行	乙种① 页	乙种① 行	正误
或约偶或约奇	1	2	正	10	2	10	或约偶弗约奇
所握三十七	1	8	反	1	9	末	所握三十三
仍为元数	1	17	反	5	20	9	乃为元数
○＝丅○○					21	1	—○＝丅○○
各以元率约之	1	11	正	7	32	5	各以定母约之
‖‖定数	1	24	反	9	28	8	Ⅲ零数
兄弟三人	2	3	反	10	34	6	上农三人
≣○土	2	12	正	末	43	8	＝‖‖土（以下草文俱应相应改）
五分九十一秒	3	2	反	5	56	10	五分九十二秒
≡Ⅲ㐅○⊥Ⅱ					63	2	≡Ⅲ㐅○⊥Ⅱ
百丨≣Ⅲ⊥丨≣Ⅲ					67	2	—日≣Ⅲ⊥丨≣Ⅱ
总率	3	15	正	2	70	末	纪率
一商	3	19	反	2	76	5	丅商（与第3行商丅并列）
二Ⅲ≟Ⅲ≟Ⅲ闰缩					78	1	一Ⅲ≟Ⅲ≟Ⅲ闰缩
丅≟Ⅱ≟○○○朔积年					78	3	Ⅱ≟Ⅱ≟○○○朔积年
二千二百两给三万一千	11	1	反	1	269	5	二千六百两给三万二千
深一尺一寸一分四厘	12	1	反	3	291	11	深一尺二寸一分四厘
深八丈	13	11	正	10	326	9	深八尺

续表

误文（图）	宜稼堂本						正误
	甲种①				乙种①		
	卷	页	面	行	页	行	
渍台图	14	3			347		（应按本书“秦…与土木建筑学”图改）
二百步一十八步分之五	14	11	正	3	346	2	二百三十二步三分步之二
金亖Ⅲ	17	10	正	1	425	3	金亖Ⅲ |||
正图	17	12	反	5	428	6	政图
丨图	17	13	正	1	428	9	卜图
银亖丌𝍫丨〓𝍣					428	9	银亖丌〓丨〓𝍢
银亖丅𝍫丄〓𝍢					430	1	（银亖丅𝍫丄亖𝍢之下添）〇
价＝𝍤	7	16	反	1	433	3	价＝𝍤＋贯
闰图价𝍤	17	16	反	3	433	3	闰图价𝍤＋贯
上图以上二事相乘	17	23	正	1	440	7	上图以下三事相乘
出实、米实、麦实、曲实					445	1	四词，都应向上移二个字与数码字靠拢。
出谷、得米、易麦、踏曲					448	2	

① 甲种本指道光壬寅（1842）畅月开雕本。乙种本指民国二十六年（1937）商务印书馆国学基本丛书本（（丛书集成本用同一纸型）。

从《数书九章》看中国传统数学构造性与机械化的特色

吴　文　俊

在已译成中文斯特洛伊克著的《数学简史》[1]中，有一段耐人寻味的议论：

> 在一切古代东方数学中没有任何地方足以使我们发现我们所谓证明的任何企图。从未用过推理，而仅仅是列出某些规则来："如此做，做这个"。……对于我们这些被欧几里得的严格推理所教育的人，这整个的东方思考方法在最初似乎是惊异而又高度地令人不满。但是当我们认识到我们讲授给我们今天的工程师们和技术人员们的数学大部仍是"如此做，做这个"的方式，而很少有严格的证明企图时，这种惊异就会消灭了。在许多中学中，代数学现仍被教成一堆公式而不是一种演绎的科学。东方数学似乎从未由它所由而生的几千年来技术学和行政问题的影响下解放出来。

斯特洛伊克看出了以中国包括印度在内为代表的所谓东方数学，与以欧几里得为代表的数学有着本质上的差别，而且直到现在东方数学在中学教育中还占据着统治地位，可谓见解精辟独到，值得称道。

但是，对于所谓东方数学缺少推理证明之说，则不能不予以澄清。

欧几里得创造了一套用定义、公理、定理构成的逻辑推理演绎体系，自有其独到之处，但并不是必须按照这一格式才算是逻辑推理。固然牛顿的《原理》是按照欧几里得的格式来写作的，但

笛卡儿的《方法》[3]就没有照此办理，总不能说笛卡儿就没有推理没有证明了。不仅是17、18世纪的大量数学著作没有遵守欧几里得的格式，即使是现代流行的数学刊物，也可以看到不少重要的论文写作是没有遵守这一格式的。

至于我国的数学经典著作，则更是另有一种独特的表达方式，与欧几里得的方式尽管大相径庭，却同样能起到一定的演绎推理与证明的作用，国内论者已多，不再重述。特别值得一提的是李继闵同志的看法，我国古代数学往往寓理于算，不证自明，下文当再说明此点。

其次，公理、定义、定理的表达方式，并不能保证逻辑推理就能严密无间。欧几里得《几何原本》(以下将简称《原本》，参阅〔2〕)在逻辑上弊病甚多，这在19世纪数学批判性浪潮中已多所指摘，即使Hilbert的《几何基础》一书被认为已奠定了所谓欧几里得几何的严密基础，作者近年也已为文指出，欧几里得的证明方式是不可能达到应有的严密程度的，而且是几乎无可挽救的。由于离题过远，在此不再深论。

另一面，我国的古代数学并没有采用欧几里得的演绎形式。但同样达到正确结论，其成果之辉煌，远非同时期世界其他地区的数学可以比拟。象刘徽《九章注》中所表现的推理论证之严密细致，当代数学史家如Wagner等也已为之心折。不能否认欧几里得的演绎体系与表达形式有某种优越之处，但不能与推理的严密性视为等同。而我国古算的表达形式有其另外优越的一面，非欧几里得体例所能及，作者以后有机会当专文评述，在此不再深论。

总之，形式应为内容、目的服务，数学的内容实质才是主要的一面。就内容实质而论，所谓东方数学的中国古代数学，具有两大特色，一是它的构造性，二是它的机械化。

19、20世纪之交，数学应否构造性地发展曾经引起激烈的争论。并因此而深刻影响了当代数学的发展。对于构造性概念的本身，数理逻辑学家还分成了五个不同的层次。对这些论争将由专

门家来讨论，非本文所能及。就本文所拟讨论的《数书九章》来说，不妨把构造性与机械化的数学看作是可以直接施用之于现代计算机的数学。我国古代数学，总的说来就是这样一种数学，构造性与机械化，是其两大特色，算筹算盘，即是当时施用没有存储设备的简易计算机。

就《数书九章》而论，我们将就三个方面来举例说明。

一、质数与等数

欧几里得《几何原本》共分13篇，其中7、8、9三篇是数论。质数概念是整个数论的基石，该书第9篇命题20证明了质数的数目比任何指定数目都要多。欧几里得一书原来的证法只就祗有三个质数立论，叙述也比较繁琐，现在已成经典的证法，则如下述。假定只有有限个质数p_1，p_2，…，p_n，作出$p_1p_2\cdots p_n+1$，于是不论这数本身是否质数，都将引出矛盾，因而有任意大的质数，如所欲证。

这是一种典型的非构造性的证法，只证明了任意大质数的存在，但对于如何给出比一个数更大的质数来并未提供任何线索。

在我国，则根本没有质数的概念，自然谈不上奠基在质数概念上的数论等分支学科的形成。

但是，数学决不能认为是单纯作为推理训练之用的学问，更不能沦为数字游戏之学。数学之所以重要，主要是因为能有助于人类认识自然、控制自然，为解决应用中产生的各种问题提供有效手段。就这一点来说，我国古代没有质数的数论要比欧几里得的数论不仅毫无逊色，而且要优越得多。《数书九章》中的大衍求一术，就是我国古代数论的一项代表性的成就。

大衍求一术，向被誉为中国剩余定理，但在国外文献阐述中国剩余定理时，往往局限于诸定母两两互质的特殊情形，而在原来的大衍求一术中，却没有这一限制。在大衍求一术中，并不需

要质数与互质这些概念，而代之以连环求等的方法，巧妙地得到了一般情形的解法。

求等之等的等数，即是现代通称的最大公约数。在《原本》第7篇的第1，2，3三个命题，即是关于求若干整数(事实上不超过3个)的最大公约数，这在后世被称为欧几里得算法。

在我国，求两数最大公约数即等数用更相减损之术，将两数以小减大累减以得之。如求24与15的等数，其逐步减损如下表所示：

(24，15)→(9，15)→(9，6)→(3，6)→(3，3)

每次所得两数与前两数有相同的等数，而两数之值逐步减少，因而到有限步后必然获得相同的两数，也即所求的等数，其理由不证自明。(参阅沈康身同志的有关著作〔4〕。)

这个寓理于算不证自明的方法，是完全构造性与机械化的，尽可以据此编成程序上机实施。

欧几里得算法与上述更相减损之术实质上是相同的，但《原本》除了引进许多概念、定义以外，还给出了一个证明。这个证明占用了足足三页的篇幅(Heath的注释已除去不算)，不仅繁长艰涩，而且依据Heath有下面的注释：

> 请注意欧几里得假定了下面的事实作为一个公理，即如果a，b都被c除尽，则$a-pb$也能被c除尽。在下一命题中，他也假定了一个公理，即在同样情形下c也能除尽$a+pb$。

这个注释无异是说，欧几里得的原证在逻辑上并不严密而且有漏洞，它隐含了一些不该略去的公理，岂仅是证明繁长晦涩而已。

《原本》第7篇的命题1与2，虽然等价于后世通称的欧几里得算法，但就其证明原来的叙述方式来说，既不是构造性的，也不是机械化的。即使按照后世已经转化加工成真正算法的形式，在整个欧几里得体系中，也只能算是一个例外。这与贯穿在我国古代数学中构造性与机械化的算法成果相比，是不可同日而语的。

我国古代数学中有等数而没有质数，没有质数该怎么办？莫绍揆同志已有一文[5]论之，甚为精辟，定母完全任意的大衍求一术提供了不用质数概念的又一实例。

在任意定母的情形下秦九韶应用连环求等的术文虽少有瑕疵，但不难纠正，稍加改动即可，可以参阅本书有关论文。

明代以来我国数学日益衰微，九章之学几已湮没无闻。一自利玛窦东来，数学舞台遂为欧几里得之学所垄断独占。清代虽不乏有志有为的杰出之士，致力于发掘古籍发扬古学，但终究因衰微日久，往往只知以欧几里得之学生搬硬套，对古籍强为穿凿作解。有计算经验者都知道要把一数分解成质数因子并非易事，而求两数的等数却要容易得多。清张敦仁等以质数概念解释定母任意的大衍求一术，既使原意全失，又无异于化易为难，我认为不足为法，是不可取的。

二、增乘开方法与正负开方术

从《九章》中开平、立方发展至宋元时期增乘开方法与正负开方术的求方程数值解法，是中国古代数学构造性与机械化思想方法的又一代表性成就。

为简单起见，试考虑下面形式的方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=a_n \qquad (1)$$

其中a_i都>0。计算数学应讲求正确与效率，我们试就这种方程对宋代古法作一检查。检查方法将使用一个简单的计算器对这种方程求解来作出判断。

作者曾用一种HP25型的袖珍计算器做过这种检查工作。这种HP25有8个存储单元可以存放数值，利用这8个单元就可以编一个小程序解高至5次的方程(1)，而且可达到任意预定的精度，所用方法在于利用我国独创的十进位位值制数字表达法逐步求得解的各位数字。例如对$x^2=2$求2的平方根时，将逐步求出1，

1.4，1.41，1.414，1.4141，…其每次修正数值为0.4，0.01，0.004，0.0001，而最后到1.4141为止时所达精度为0.0001。

今以3次方程(1)为例，利用HP25编程序如下。

HP25的8个存储单元记作[0]，[1]，…，[7]。我们将所设方程系数a_1，a_2，a_3各存入[1]，[2]，[3]，逐次求得的方程近似解设为x_0存入[0]，逐次解的修正数值记为c存入[6]，即每次近似解x_0改进为下一次的x_0+c，又所预定要求的精度设为$\delta=0.0_k1$存入[7]。这里没有用到存储单元[4]，[5]，说明本例还没有使用上HP25的全部潜力，实际上同样可以解5次方程。

先将a_i，c，δ，以及尝试解x_0存入[1]，[2]，[3]，[6]，[7]，[0]后，即可依照下面的程序逐步按键求得所要求精度的数值解，程序右面部分是简单的说明。

步骤	程　　序	说　　明
1	*RCL* 0	将[0]中的x_0取出3次。
2	*ENTER* ↑	
3	*ENTER* ↑	
4	*ENTER* ↑	
5	*RCL* 1	依 $x_0^3+a_1x_0^2+a_2x_0-a_3=((x_0+a_1)x_0+a_2)x_0-a_3$ 的计算步骤将所得存显示中。
6	+	
7	×	
8	*RCL* 2	
9	+	
10	×	
11	*RCL* 3	
12	−	
13	$g:x=0$	显示中数＝0时
14	*GTO* 32	

续表

步骤	程　序	说　明
15	$g:x<0$	显示中数<0时
16	GTO　26	
17	1	显示中数>0 时 将$\boxed{6}$中c改为$c/10$
18	0	
19	STO ÷ 3	
20	RCL 6	比较$\boxed{6}$中的c与$\boxed{7}$中的δ，相减所得$c-\delta$存显示中。
21	RCL 7	
22	−	
23	$g:x\geqslant 0$	显示中数$\geqslant$0即$c\geqslant\delta$时
24	GTO　28	
25	GTO　34	显示中数<0即$c<\delta$时
26	R↓	将$\boxed{0}$中x_0修改为x_0+c并返回第2步重新开始
27	STO 0	
28	RCL 0	
29	RCL 6	
30	+	
31	GTO　2	
32	R↓	$\boxed{0}$中的数即所求解并在显示中展出
33	STO 0	
34	RCL 0	

用这一方法求方程实解所依据的原理，从计算过程即已完全清楚，已可不加辞费不证自明，而且所得结果是绝对精确的（指到预定精度而言），用不着顾虑是否收敛以及收敛快慢的问题。

对于一般形式的方程，可用益积减从正负开方等术，其理相

同，可参见本书有关论著。

我国古算只涉及求实根，其实求复根也一样可以。因为每一个复系数求复根的方程，相当于两实系数的实变方程组。若变量为x、y，可依宋元时期消元的方法得到一只有x的实系数方程，即可依增乘开方与正负开方之术求得x，y的实数解，也就是原来复方程的复数解。

目前通行的方程求数值解法是Newton法一类的迭代法，这种方法在初始值的选取，收敛与精度，系数稍有偏差时的影响，都存在着复杂甚至颇为严重的问题。当前 Berkeley的Smale与Princeton的Kuhn都从不同的角度对Newton法进行了理论探讨，可见其问题之不简单。与我国古法相较，古法之直捷了当且可排除各种病态的优越性是颇为显著的。

三、大衍求一术

大衍求一术是我国古代数学构造性与机械化思想方法的又一范例。这在国外称为中国剩余定理，但往往只涉及定母两两互质的情形，用现代语言可表述如下：

设有n个两两互质的正整数m_1，…，m_n，又设u_1，…，u_n为已知整数，则有唯一的一个$\geqslant 0$而$< m = m_1 m_2 \cdots m_n$的整数u使

$$u \equiv u_j \bmod m_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

在Knuth[6]一书中，对中国剩余定理给出了两个证明，一个是非构造性的，另一个是构造性的。这两证明颇可说明构造性与非构造性的区别，故录之于此。

非构造性证明。唯一性的证明是容易的，故只须证明存在性即足。为此，对任一$n>0$记$\geqslant 0$而$<n$的整数全体为$[n]$，又对任一整数v，记$[m_j]$中与v对m_j同余的唯一整数为v_j，考虑对应关系

$$\lambda: \begin{cases} [m] \longrightarrow [m_1] \times \cdots \times [m_n] \\ v \longrightarrow (v_1, \ \cdots, \ v_n) \end{cases}$$

显然$[m]$中不同的v将对应不同的$(v_1, \cdots, v_n)$，因集合$[m]$与$[m_1]\times\cdots\times[m_n]$中的个数相同，故$\lambda$是一对一的。特别对于每一组$[m_1]\times\cdots\times[m_n]$中的数，例如$(u_1, \cdots, u_n)$必有一$u$与之对应，这就是要证明的定理。

与前面所引《原本》中质数个数无限这一定理的证明相仿，这是一种典型的非构造性证明。这种证法简单美妙，但对要求得的u并不提供任何求法的线索。构造性的证明则不然，不仅证明u的存在，同时也给出了u的求法甚至显豁公式。下面的证明就属于这一种，也在Knuth同书中给出：

构造性证明。对任意数n，命$\varphi(n)$是它的Euler数。作

$$M_j=(m/m_j)^{\varphi(m_j)}, \quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

则据整数论定理，任意满足

$$u\equiv(u_1M_1+\cdots+u_nM_n)\bmod m$$

的数u都能使$u\equiv u_j \bmod m_j$，$1\leqslant j\leqslant n$，于是只须取$\geqslant 0$而$<m$的u即合所求。

证明中的$\varphi(n)$是Euler函数，即$\leqslant n$而与n互质的正整数个数。如果n分解成质因子的乘积

$$n=p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$$

其中p_j是不同质数，则Euler证明

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

在n本身是质数p时，

$$\varphi(p)=p-1, \quad 例如\varphi(83)=82$$

但对一般的n则须先分解成质因子再求出$\varphi(n)$，例如：

$$n=225600=2^6\cdot 3\cdot 5^2\cdot 47,$$

故

$$\varphi(225600)=2^6\cdot 3\cdot 5^2\cdot 47\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$$

$$\cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{46}{47} = 2^9 \cdot 5 \cdot 23$$

$$= 58880$$

由于分解因子并非易事，而所得$\varphi(n)$在n稍大时即相当大，M_j因而u依上证的计算量将很可观，甚至可使一台现代的计算机也难以处理。

我国古代数学没有质数概念，自然更没有Euler函数以及整数理论，但同样解决了这一问题，而且原理浅显，计算简易，甚至解决得更彻底——包括了诸m_j不必两两互质的情形。

为简单起见，仍只考虑诸m_j两两互质的情形。不论是Knuth所载的构造性证法(以下简称西法)还是秦九韶的大衍求一术，其基本原理可以说都如下述：

假定有一组整数N_i使

$$N_i \equiv \begin{cases} 1 \bmod m_j \\ 0 \bmod m_i, \quad i \neq j \end{cases} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

则任意使

$$u \equiv (u_1 N_1 + \cdots + u_n N_n) \bmod m$$

的整数u都能满足同余式

$$u \equiv u_j \bmod m_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n。$$

在西法中，所取N_j是

$$N_j = M_j = (m/m_j)^{\varphi(m_j)},$$

其依据是整数论中的一条定理，其中$\varphi(m_j)$的概念与公式以及定理的证明都是颇费周折的。

在秦法大衍求一术中，则是先定k_j，使

$$k_j(m/m_j) \equiv 1 \bmod m_j,$$

再取

$$N_j = k_j(m/m_j),$$

计算简单而理论依据已寓于计算之中，可以不证自明。

在大衍求一术中，所用专门术语是：

m_i——定母，$m=m_1m_2\cdots m_n$——衍母，

m/m_i——衍数，(m/m_i)对m_i之余n_i——奇数，

k_i——乘率，$k_i(m/m_i)$——用数，

u_i——余数，u——总数。

这些数之间的关系是：

$$k_i * n_i \equiv 1 \bmod m_i, \text{ 或乘率} * \text{奇数} \equiv 1 \bmod \text{定母}$$

$$u=\Sigma u_i * k_i(m/m_i), \text{ 或总数} = \Sigma \text{余数} * \text{用数。}$$

求一术的最主要一步在于从奇数与定母求乘率，即已知n_i，m_i时求k_i，即解

$$k_i * n_i \equiv 1 \bmod m_i$$

解法的出发点是考虑更一般形式的同余式

$$x * b \equiv c \bmod a,$$

其中a，b，c都是已知整数而x为所求，在$c=1$而b，a各为n_i，m_i，所得x即为乘率k_i。

上面的同余式有两个明显的解答：

$c=b$时，$x=1$，即$1*$奇数$\equiv$奇数，

$c=-a$时，$x=0$，即$0*$奇数$\equiv$—定数，

而在　$c=1$时，x应$=$乘率。

上面两个显然的同余式可以把其中出现的四数置于一个方阵的四角来简单地表示，即置：

$$\begin{vmatrix} \text{左上} & \text{右上} \\ \text{左下} & \text{右下} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{奇数} \\ 0 & \text{定数} \end{vmatrix}$$

方阵四角的数符合下面的关系式：

左上数 * 奇数≡右上数mod(定母)，

左下数 * 奇数≡－右下数mod(定母)

开始时位于方阵右方上下的奇定二数可以很大，求一术将四角之数递互累乘累减，使右方两数逐步减小，但却依然保持上面两个关系式成立。到右上角之数减小至1时，左上数由于上关系式就给出了所求的乘率。

将四角之数递互累相乘减以减小右方二数而保持两关系式之法，实质上与古法求两数的等数时以少减多更相减损以减少两数之值，而使等数重叠不变的更相减损之术理由是相同的，只是更为复杂而已。这可以说是求一术的真髓。

现取《数书九章》中余米推数题为例来对求一术作一具体说明。该题是一件盗窃案的侦破术，原题照录如下。

> 问有米铺，诉被盗去米一般三箩，皆适满，不记细数。今左壁箩剩一合，中间箩剩一升四合，右壁箩剩一合，后获贼，系甲乙丙三名。甲称当夜摸得马杓，在左壁箩，满舀入布袋，乙称踢着木履，在中箩，舀入袋，丙称摸得漆椀，在右边箩，舀入袋，将归食用，日久不知数。索到三器，马杓满容一升九合，木履容一升七合，漆椀容一升二合。欲知所失米数，计赃结断三盗各几何。

今以合为单位，则依题意

剩米数＝余数u_i＝1，14，1，

盗器容量＝定母m_i＝19，17，12，

衍母$m=m_1m_2m_3=19*17*12=3876$，

衍数m/m_i＝204，228，323，

奇数＝m_i除m/m_i之余＝14，7，11，

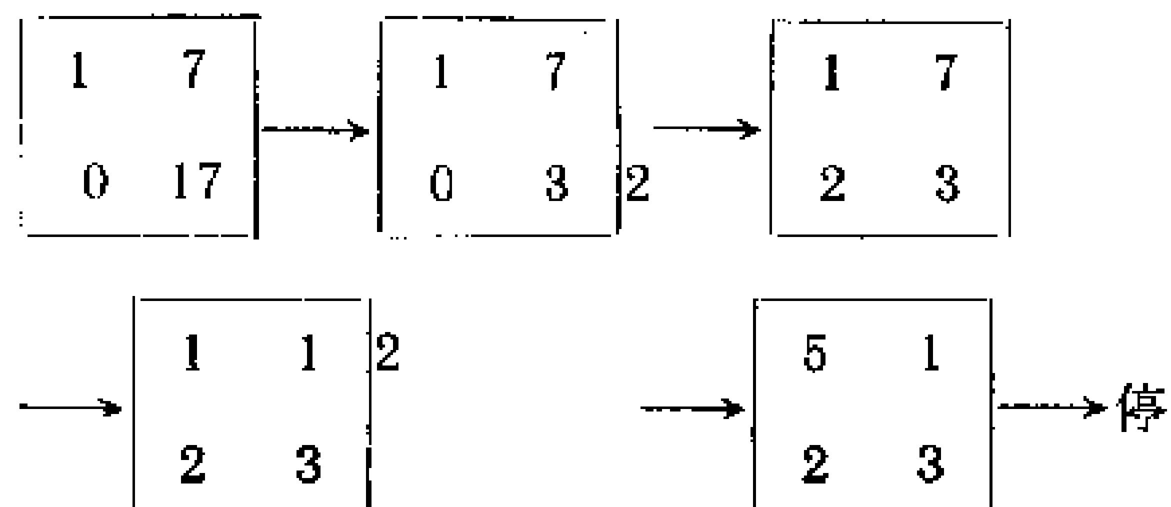
所求乘率＝k_i＝15，5，11，

这里乘率k_i的求法依大衍求一术如下表所示：

步骤	大衍求一术云	
1	置奇右上、定居右下，立天元一于左上。	1 14 0 19 ↓
2	先以右上除右下，所得商数。	1 14 0 5 [1] ↓
3	与左上一相生入左下。	1 14 1 5 ↓
4	然后乃以右行上下、以少除多，递互除之，所得商数。	1 4 [2] 1 5 ↓
5	随即递互累乘，归左行上下。	3 4 1 5 ↓
6	（同第4步）	3 4 1 1 [1] ↓
7	（同第5步）	3 4 4 1 ↓
8	（同第4步）	3 1 [3] 4 1 ↓
9	（同第5步）	15 1 4 1 ↓
10	须使右上末后奇一而止	停
11	乃验左上所得以为乘率	乘率 $k_1 = 15$

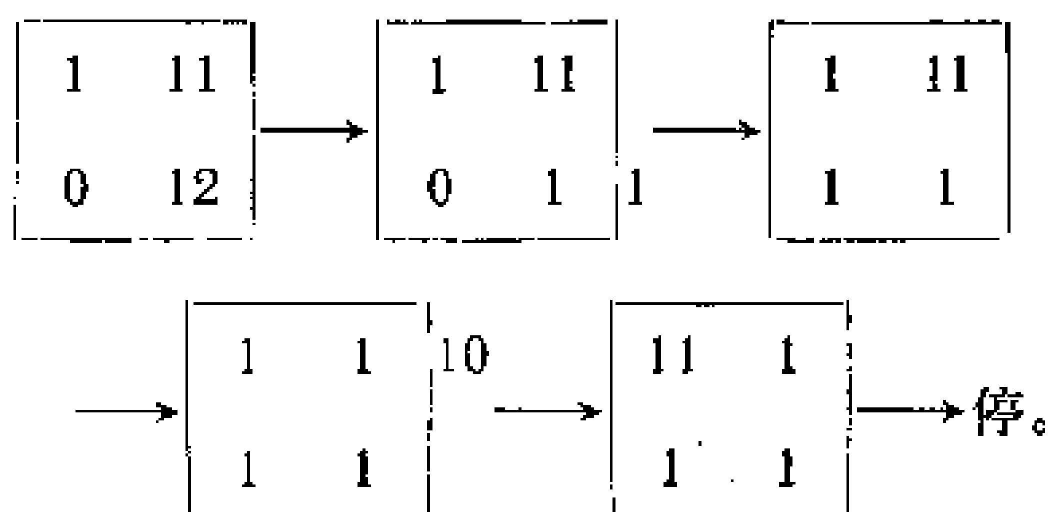
其余两个乘率的求法也一样，算式如下：

求k_2，使$k_2*7\equiv 1\bmod 17$，



得k_2=左上数5。

求k_3使$k_3*11\equiv 1\bmod 12$。



得k_3=左上数11。

计算乘率k的过程颇为简单，且其原理正与求等数的原理类似，颇为显然，即所谓理在算中，不用多加辞费，已可不证自明。

若用西法，其计算量就要大得多。试将两种方法列表比较如下。

$$求\quad u\equiv\begin{cases}1\bmod 19\\14\bmod 17\\1\bmod 12\end{cases}$$

西　　　　　法	秦法（大衍求一术）
$N_j=(m_1\cdots m_n/m_j)^{\varphi(m_j)}$	$k_j*(m_1\cdots m_n/m_j)\equiv 1 \bmod m_j$ $N_j=k_j(m_1\cdots m_n/m_j)$
$N_1=(17*12)^{\varphi(19)}=204^{18}$	$k_1*(17*12)\equiv k_1*14\equiv 1 \bmod 19$ $\Rightarrow k_1=15$ $N_1=15*(17*12)$
$N_2=(19*12)^{\varphi(17)}=228^{17}$	$k_2*(19*12)\equiv k_2*7\equiv 1 \bmod 17$ $\Rightarrow k_2=5$ $N_2=5*(19*12)$
$N_3=(19*17)^{\varphi(12)}=323^4$	$k_3*(19*17)\equiv k_3*11 \bmod 12$ $\Rightarrow k_3=11$ $N_3=11*(19*17)$
$u\equiv 204^{18}+14*228^{17}+323^4 \bmod 3876$	$u\equiv 15*(17*12)+5*(19*12)$ $+11*(19*17) \bmod 3876$

在《数书九章》所列大衍求一术的 9 个问题中，余米推数中的数都不大，但西法的计算量已颇可观。在另一题古历会积中，出现了

$$奇数=9253，定母=225600,$$

按大衍求一术计算，易从

$$k*9253\equiv 1 \bmod 225600$$

算得

$$k=172717。$$

若依西法，则须计算

$$N=9253^{\varphi(225600)}=9253^{58880},$$

即使一台现代化的计算机，也是难于完成这一计算任务的。

最后我们想指出，载于Knuth一书的西法，自然早已有之，但是由于用到Euler函数，因而此法出现的最早年限是 18 世纪。至

于大衍求一术，则即使算完全是秦九韶一人的创造，其出现的最低年限，也至迟是13世纪——1247年。

参 考 文 献

〔1〕D. J. 斯特洛伊克，数学简史(关娴译)，科学出版社，(1956)。
〔2〕T. L. Heath. The thirteen books of Euclid's Elements. Dover (1956)。
〔3〕R. Descartes. La géomètrie, Dover(1954)。
〔4〕沈康身，更相减损术源流，全国数学史讨论会，(1981)。
〔5〕莫绍揆，假如没有素数概念该怎么办？数学研究与评论，4(1982) 183。
〔6〕D. E. Knuth, The art of computer programming, Vol. 2, Seminumerical algorithms (1969)。

《数书九章》与《周易》

罗 见 今

在中国数学史上，将有价值的数学方法引入占蓍之法的著作，秦九韶的《数书九章》堪称典型，它受到《周易》占法的影响，把数术同数学揉合起来。秦九韶在这本书的第一卷"蓍卦发微"中所阐明的"大衍总数术"，形式上是解说《周易》揲蓍程序，实质上则为发挥"大衍求一术"，后者是数论中解一次同余式组的著名方法。秦九韶本人非常重视这一成就，在自序中两度提到："独大衍法不载《九章》，未有能推之者"，"昆崙旁礴，道本虚一，圣有大衍，微寓于易。奇余取策，群数皆捐，…其书《九章》，惟兹弗纪。"秦氏并在卷一、卷二中给出定理(两处)、详草和九类例题。很自然地，人们会提出这样的问题：秦九韶受到《周易》的哪些影响？"大衍求一术"同《周易》占法有怎样的关系？本文在介绍《周易》的一般情况之后，将对《周易》揲法和秦九韶揲法——大衍总数术从数学上、易学上进行对比分析，从而得出相应的结论。

一、《周易》简介

《周易》又称《易经》，是我国最古老的一部占筮用书。它的内容深奥、复杂，记录了我们的祖先对各种客观情况所作出的兆象及吉凶判断，反映了古人在同社会和自然界的矛盾斗争中，由于不能掌握其发展变化的规律而求助于神学预示的迷信思想，同时也直接或曲折反映了他们对客观事物的观察和认识，记载了他们实践活动的经验、感受和评价，表现了他们对周围世界进行抽象

和概括的愿望，其中也包含了一些朴素的唯物主义和初步的辩证观点。所以，《周易》便成为中国哲学史上第一部经典著作，在封建社会，其地位居于六经(《易》、《诗》、《书》、《礼》、《乐》、《春秋》)之首。

《周易》的起源众说不一，一说夏、商、周曾三代易名，分别叫《连山》、《归藏》和《周易》。关于"易"的含义，也有多种解释，据东汉郑玄的注解，"易"有三义，即"简易"、"变易"和"不易"。[1]

《周易》分《易经》和《易传》两部分。《经》由卦图、卦辞和爻辞构成，共有六十四卦，每卦有一个卦图、一条卦辞和六条爻辞。《传》共有七种，即彖传、象传、文言、系辞、说卦、序卦、杂卦，是对《经》的注解。由于它的历史也很古老，传统上把它看作《周易》的一部分。《周易》经文以乾☰、坤☷、震☳、巽☴、坎☵、离☲、艮☶、兑☱八卦(依次象征天、地、雷、风、水、火、山、泽。每卦所象征的内容还有多种解释)两两排列而演成六十四卦，三百八十四爻，用来预卜吉凶休咎。"爻"，交错变动之意，《系辞传》说："爻也者，言乎变者也"，又说："爻也者，效天下之动者也"。爻有阴阳之分，阴爻--，阳爻一，是两种基本符号。例如六十四卦中第四十七卦的卦图是䷮，象征水的"坎"在象征泽的"兑"下边，它的卦名是"困"。后面附有卦辞。解说爻象的一句话是这样的："象曰：泽无水，困，君子以致命遂志。"魏王弼注："泽无水，则水在泽下；水在泽下，困之象也。处困而屈，其志忘，小人也。君子固穷，道可忘乎？"经文对"困"举出几种情况，并预言了吉凶。这一条是说，水在泽下，泽中无水，水草枯，鱼虾死，处于困境，所以卦名为困。引伸意义是君子临于困境，要舍弃生命以行其志愿。六十四卦排列了各种情况，逐一地予以解释，并预卜了吉凶。对于古代社会来说，用$(2^3)^2=64$卦乃至$64\times6=384$爻来概括各类事件的利害，已经够用了。

《周易》的作者，根据传说和后人注释，尚不能确切地认定，它的成书大体可分为三个历史阶段：甲、《系辞传》说："古者包牺

氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情。”包牺就是伏羲，相传为古帝三皇之一，姓风，都于陈（今河南开封东）。所以有伏羲重卦说（王弼、孔颖达）。另外，还有神农重卦说（郑玄），以及夏禹重卦说（孙盛）。乙、司马迁在《史记·周本纪》中说："崇候虎潜西伯（季历子昌，即后称之周文王）于殷纣，纣乃囚西伯于羑里（羑即牖，今河南汤阴北有牖城），"文王其囚羑里，盖益易之八卦为六十四卦"。历史上通常称之谓"文王演周易"或"文王重卦"。这一说法几年前在考古学和古文字学方面得到了新证明[2]。故《易经》不是一人一时的作品，而是在漫长的历史年代里形成的，其中保存有殷、周占卜纪录，集中了筮人的活动结果。它的编纂，大约在西周后期。丙、《易传》七种汉人认为是孔子所作，因为它引孔子语录二十九条，均记有"子曰"字样。有人认为这出于孔门弟子或他人手笔。现在不少意见认为《易传》在战国时代成书，亦非出自一人之手。

从思想史和科学史的角度来看，《周易》的内容十分丰富，它既含有哲学、文学、政治、历史、社会学、逻辑、道德、法律、军事等社会科学的内容，也含有天文、数学、音律、医理、生物等自然科学的内容。因而，它对中国哲学和科学思想的发展产生了不可忽视的影响，儒道名墨等先秦诸子或多或少地从《周易》中汲取过营养，在历史上形成了历时两三千年的易学学派，许多哲学家、科学家都要读《易》，著作丰富，今有传本约三千余种。这里，我们将注意它的自然观，以及它的哲学模式在数学上的表现。限于篇幅，仅举一例，就是六十四卦与二进制的关系。微积分的创始人之一、德国哲学家莱布尼兹曾高度评价《周易》六十四卦排列的数学意义，在1703年发表的文章中，他认为古代中国人在发明二进制计算方面有优先权。如所周知，二进制数字0和1，可与《周易》中两个符号阴爻--和阳爻－相对应。把这两类符号集合按有重排列的方法任取三个排在三个位置上，易知有$2^3=8$种排法，所得

即八卦——少成之卦；将八卦(8类元素)每次任取两个排在下、上两个位置上，易知有$8^2=64$种排法，所得即六十四卦——大成之卦，把六十四卦按宋儒邵雍的卦序对译成二进制数字，就可以得到从0到63的完整的数字顺序，如坤☷为000000，剥☶为000001，比☵为000010，观☴为000011等，直到乾☰为111111。在数学史上，《周易》八卦、六十四卦是有重排列的最古老的范例。这种排列，导致了与二进制计数相当的结果。虽然阴爻--和阳爻－是否具有数字的意义是有争论的问题，这并不排斥从易学上和从数学上进一步探讨的必要性。

从中国数学史上来看，受《周易》影响不是个别的、也不是自宋元以来所特有的现象。例如三世纪大数学家刘徽，在他所写的《九章算术》序中就有这样的话："古者包牺氏始画八卦，以通神明之德，以类万物之情；作九九术，以合六爻之变。…于是建历纪协律吕，用稽道原，然后两仪四象精微之气，可得而效焉。"唐朝天算大家僧一行也受到易的启发，以及后来南宋秦九韶等，这里不多引证了。影响所及，主要在数理哲学方面，同时也有具体的数学方法和对象。《周易》虽不是一本数学书，但它的太极、八卦、占筮、河(图)洛(书)等部分却涉及到几何、坐标、级数、奇偶、对称、对应、配置、排列、组合、同余式等数学内容。《周易》也有消极影响，如数术的流传不利于数学的发展，这是一个需要进一步探讨的问题。

二、《周易》揲法

《系辞传》：称"大衍之数五十，其用四十有九。分而为二，以象两；挂一以象三；揲之以四，以象四时；归奇于扐以象闰；五岁再闰，故再扐而后挂。…是故四营而成易，十有八变而成卦。"秦九韶在《数书九章》开卷大衍类"蓍卦发微"中引用这段话的前一部分和后一句，充分加以发挥。在他所处的时代，由于程朱理学再

起，在社会上逐步取得统治地位，朱熹的书开始流传。朱熹在《易学启蒙》和《蓍卦考误》中对《周易》揲蓍之法有详尽的辨正，以后被奉为释易的经典。他研究了《周易正义》的解释，以及刘禹锡、李泰伯、沈括、程颢等七、八人的说法，认为"诸家揲蓍说，惟笔谈此论简而尽。"本文主要依据朱说[3]和部分参考今人的研究[4]，对《周易》揲法作一般解释并给出数学上的说明。

蓍占是一种植物占，是在一些原始前兆迷信的基础上逐步转化成的一种占卜形式。它的流行较为普遍，占具为蓍草或筮竹，根据数目的奇偶来断吉凶。蓍(shī)，蒿属，多年生草本植物，《尚书·洪范》说它"百年一本"，古时被视为神灵之物，《史记》也说它"生满百茎者其下必有神龟守之"，易用它来决疑。蓍也因问占者的地位不同而分若干等级：天子之蓍九尺，诸侯七尺，大夫五尺，士三尺。《周易》的蓍法已脱离原始阶段，专事占卜的筮人才能掌握。揲(dié或shé)，或作抴，又作擸，动词，阅持之意；扐(lè)，指筮人把奇数(这里的奇是奇零的意思，一般指1，2，3，4)根蓍策夹在手指间。

《系辞传》说："易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦"，这是易学的总纲，但《易经》对于取兆的方法并未记载。对本节开头所引"大衍之数五十"一段话，易学的一般解释如下：

① 蓍策总数是五十根，去其一，以象征太一即太极，实际用于占算的是四十九根。

② 把它们任意分成两部分，以象征天、地"两仪"；从第一部分里取出一根，不参与计算，叫"挂一"，与原来两部分一同象征天、地、人"三才"。

③ 将第一部分的蓍策每四根一组数出，叫"揲四"，以象征春、夏、秋、冬四时。

④ 将所余的奇数(或一、或二、或三、或四)根蓍夹在左手指间，叫"归奇于扐"，以象征闰年。

⑤ 将第二部分蓍草也照③④办理。

于是两部分"归奇"的蓍数非四即八，加上"挂一"的一根，共五或九根不用，完成了"第一变"，此即所谓"初一揲不五则九，是一变也"[3]。余下$49-5=44$，或$49-9=40$蓍参与第二变的计算，叫"再扐而后挂"，以象征"五岁再闰"。

从数学上来看，第一变有必要详细分析。这里应用一次同余式符号表出它的过程：

大衍之数五十，其用四十有九	$50-1=49=R$
分而为二，（以象两）	$R=R_1+R_2$
挂一（以象三）	$(R_1-1)+R_2=48$
揲之以四，（以象四时）	$R_1-1\doteq r_1 \pmod 4$
	$R_2\doteq r_2 \pmod 4$
归奇于扐，（以象闰）	$r_1+r_2=4$或8
	$1+r_1+r_2=5$或9

存在两个问题：甲、通过以上步骤能否保证在任何情况下$r_1+r_2=4$或8？即"初一揲不五则九"是否确定无疑？乙、第一变后所余的蓍数40或44，都是4的倍数（参考下文二变、三变后所余的蓍数具有同样的性质）是必然的，还是偶然的？这两问是易卦数理的关键所在。

本文认为，至迟在史料〔3〕中已经给了肯定的答案。为了清楚说明这两个问题，我们引入"分揲定理"①。根据分揲定理，$48\doteq 4 \pmod 4$，这里$r=m=4$，故必有$r_1+r_2=4$或8，再加"挂一"的1：$1+r_1+r_2=5$或9。"初一揲不五则九"，在数学上是有保证的。另外，证明中知$R\equiv r_1+r_2 \pmod m$，对揲法有$R=R_1+R_2\doteq 1+r_1+r_2 \pmod 4$，故一变之后所余蓍数$R-(1+r_1+r_2)$必为4的倍数。

① 已知$R=R_1+R_2$（R，R_1，$R_2\in N$），若$R\equiv r \pmod m$，$R_1\equiv r_1 \pmod m$，$R_2\equiv r_2 \pmod m$，可以证明$r_1+r_2=\begin{cases} r\text{或}m+r & (r\neq 0),\\ r\text{或}m & (r=0),\end{cases}$本文称它为"周易分揲定理"，详细证明附于文末。

⑥第二变揲法仿上②—⑤，用蓍四十或四十四根：

$40 = R_1 + R_2$	$44 = R_1 + R_2$
$(R_1 - 1) + R_2 = 39$	$(R_1 - 1) + R_2 = 43$
$R_1 - 1 \doteqdot r_1 (\mathrm{mod} 4)$	$R_1 - 1 \doteqdot r_1 (\mathrm{mod} 4)$
$R_2 \doteqdot r_2 (\mathrm{mod} 4)$	$R_2 \doteqdot r_2 (\mathrm{mod} 4)$
$r_1 + r_2 = 3$或7	$r_1 + r_2 = 3$或7
$1 + r_1 + r_2 = 4$或8	$1 + r_1 + r_2 = 4$或8

这就是所谓“第二揲，不四则八，是二变也”[3]。根据分揲定理，$39 \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$，$43 \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$，在这两种情况下都有 $r_1 + r_2 = 3$或7，再加“挂一”的1：$1 + r_1 + r_2 = 4$或8，“不四则八”，也是确定不变的。另外，二变之后所余蓍数必为4的倍数。

⑦第三变揲法仿二变，用蓍或$40-8=32$，或$40-4=36$，$44-8=36$，或$44-4=40$根，三者必居其一。由分揲定理，$39 \equiv 35 \equiv 31 \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$，在这三种情况下都有 $r_1 + r_2 = 3$或7，且$1 + r_1 + r_2 = 4$或8，即所谓“第三揲亦不四则八，是三变也”[3]。三变之后，余下或三十六，或三十二，或二十八，或二十四蓍，均为4的倍数。这时“以三变挂扐之策分措于三指间，…且一手所操，多至二十五策…”。[3]

⑧将第三变的余蓍，以四除之，得九，或八，或七，或六。以上揲蓍的目的，就是为了取得这四数之一；这四个象数，在甲骨文上也找到了根据[2]。由于占法十以内奇数为阳爻，偶数为阴爻，“揲蓍之数，九过揲则得老阳(=)，六过揲则得老阴(==)，其少阳(=)称七，少阴(=)称八，义准此”[3]。于是数字变成了爻象。“四营而成易者，谓四度经营蓍策(按即“分二”、“挂一”、“揲四”、“归奇”)乃成易之一变”[1]，经三变而成一爻，故“十有八变而成卦”。

综上，揲法有两大特点：一是有确定的程序②—⑧，二是要获得确定的结果九，六，七，八。两者密切相关。这对于希望驭繁执简的筮人来说是成败攸关的问题，因为得不到上述四数之一，

占蓍就无法继续进行。虽然《周易》并未记载揲法，也不会有分揲定理的表述形式；但古人在悠久的历史中积累了经验，能够了解并应用这一数学规律，将程序和结果记录下来，却是考之有据的。在这个意义上讲，我们也可以把这一定理称做"周易分揲定理"。今天看来，它的结果并没有不同凡响之处，但被筮人利用后，带有浓厚的神学色彩，成为几千年对占法迷信的一个原因。

从数学上进一步分析。以4为模，将正整数$R-1$分成四个剩余类：〔1〕，〔2〕，〔3〕，〔4〕（即〔0〕）；揲法第一变的运算程序使四类中的元转变为类〔3〕中的元，即变成能被4整除的数；并且在二变、三变之后，所得结果均为类〔3〕中的元。该类对叫做"揲法"的运算自封。这一性质对筮人当然很有用，他可以不动脑筋照章办理，结果却在预料之中。

当然，由于必须算出6，7，8，9四数，在揲法程序的规定下，在任意正整数中入算的数R必有一确定的范围。可以证明它应满足$R-1=4k+r$（$k=11$，$r=1$，2，3，4），亦即R只能是46，47，48，49四数之一。若取$R\leqslant45$，则算出数必有可能$\leqslant5$；若取$R\geqslant50$，算出数必有可能$\geqslant10$。这些情况的出现会使占算破产，筮人均予排除。这就是为什么"大衍之数五十，其用四十有九"，为什么要"挂一"等，数学道理并不神秘。扫清笼罩在易数上的迷雾，有助于认识含于其中的哲理。

三、秦九韶揲法——大衍总数术

秦九韶在"蓍卦发微"中将"大衍总数术"用于占算，创造了他自己的一整套揲法，其核心是纳入揲蓍程序的、纯数学的一次同余式组解法——"大衍求一术"。"大衍求一术"本来较难，对古人更难，筮人不易掌握；将揲法数学化来解释《周易》，当然不为传统易学所认可。但是，秦九韶这一独出心裁的努力，却在数学史上写下了光辉的一页。关于"中国剩余定理"，本文集中有另文详

加分析论证；而本文注意的中心，在于比较“大衍总数术”即秦九韶揲法与《周易》揲法的同异之点，从而得出相应的结论来。

“蓍卦发微”开卷第一句：“问易曰：‘大衍之数五十，其用四十有九’，又曰：‘分而为二，以象两；挂一以象三；揲之以四，以象四时’，三变而成爻，‘十有八变而成卦’。欲知所衍之术及其数各几何？”

秦九韶认为这类问题的解法不独对占蓍有用，还可用于解“古历会积”、“堆计土功”、“推库额钱”、“分粜推原”、“程行计地”、“程行相及”、“积尺寻源”、“余米堆数”等实际应用问题，把它们都归为“大衍类”，列为《数书九章》十八卷的第一、二卷，可见他是以纯数学的眼光和手法来处理这些问题的，与《周易》似乎没有什么关系。他的着眼点在于应用，介绍了几种实数(“元数”、“收数”、“通数”、“复数”)的定义，给出了“大衍求一术”的定理。然后针对上述“蓍卦”一问，在“本题术”里，作了如下回答(这里将它分成八个步骤)：

① “置诸元数，两两连环求等，约奇弗约偶；偏约毕，乃变元数，皆曰定母，列右行；②各立天元一为子，列左行。以诸定母互乘左行之子，各得，名曰衍数。③次以各定母满去衍数，各余，

三曰木，四曰金，五曰土。”“两两连环求等”，指任两元数求最大公约数（“等数”）。“约奇弗约偶”：将其中一数中的约数消去，而不是将两数的约数同时消去。每两元数一次约毕，约后应“无等”[5]（没有公因数）。这样将元数变为“定数”（或“定母”），记作a_i。本题$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=3$，$a_4=4$。定数之积$\prod a_i=M$叫“衍母”，可以证明它是诸元数的最小公倍数。在不引入素数概念时，这种变元数为定数的程序绕了一些弯路[6]，但是它解决了不用分解质因数而求最大公约数和最小公倍数的问题。在我国古代数学中，这个问题是有独特解法的[7]。

② 在“以诸定母互乘左行之子”时，惟不“对乘本子”，即得“衍数”，记作G_i，如本题$G_1=1\times3\times4=12$，$G_2=1\times3\times4=12$，$G_3=1\times1\times4=4$，$G_4=1\times1\times3=3$。这些结果即是以各定数除衍母$G_i=\frac{M}{a_i}$。秦氏在“草曰”开始直接将元数1，2，3，4用此法求得衍数24，12，8，6，因其和为50，便说：“故易曰‘大衍之数五十’”显然这一步骤仅为附会大衍之数。又谈“算理不可以此五十为用”，因引出求定数一说，但“衍数”一名，即是这样由“大衍之数”而来。

③ “以各定母满去衍数”分两种情况：

i）若衍数大于定母，即$G_i>a_i$时，则有

$$G_i\equiv g_i(\mathrm{mod}\,a_i),$$

ii）若衍数小于定母，即$G_i<a_i$时，则有

$$g_i=a_i。$$

g_i即奇数（“归奇于扐”之奇，奇零之意）。本题所得奇数$g_1=1$，$g_2=1$，$g_3=1$，$g_4=3$。求奇数之法来自《周易》蓍卦中揲四之法，但扩充为以定母a_i分揲衍数G_i。

④ 已知诸奇数g_i和诸定母a_i，用“大衍求一术”求“乘率”，记作k_i，这是”大衍总数术”的核心。用数学式子表示出来，就是求出满足

$$k_i\frac{M}{a_i}\equiv1(\mathrm{mod}\ \ a_i)$$

或 $k_i g_i \equiv 1 \pmod{a_i}$

中k_i的值。这里

$$G_i = \frac{M}{a_i} > a_i,\ G_i \equiv g_i \pmod{a_i},\ 0 < g_i < a_i。$$

本题中用“大衍求一术”求得的乘率为$k_1=1$，$k_2=1$，$k_3=1$，$k_4=3$。

⑤ “以乘率乘衍数，各得用数”。“用数”有“泛用”f_i和“定用”f_i'之分，本题泛用为$f_1=12$，$f_2=12$，$f_3=4$，$f_4=9$。秦氏取$f_2'=f_2\times 2=24$，仍保留$f_1'=f_1=12$，$f_3'=f_3=4$，$f_4'=f_4=9$。因为$\sum f_i'=49$，于是称“四十九名曰用数，用为蓍草数，故易曰‘其用四十有九’是也。假令用蓍四十九，信手分之为二，则左手奇右必偶，左手偶右必奇，欲使蓍数近大衍五十，非四十九或五十一不可。二数信意分之，必有一奇一偶，故所以用四十九，取七七之数。”这段话带有象数色彩，是秦氏对“大衍之数五十，其用四十有九”的解释。“用数”一名之立，显然也是由附会《周易》而来。

⑥ 将四十九蓍($R=49$)分之为二($R=R_1+R_2$)，各以元数1，2，3，4分揲之，余数记为r_i。秦氏说，由于“一一揲之必奇一，故不繁揲，乃径挂一，故易曰‘分而为二，以象两，挂一以象三’”。这里把揲一所余的一视为“挂一”，即$r_1=1$。秦氏举$R_1=33$为例，以2，3，4各分揲一次

“二二揲之余一”，$33\equiv 1 \pmod 2$

“三三揲之余三”，$33\equiv 3 \pmod 3$

“四四揲之余一”，$33\equiv 1 \pmod 4$

故$r_2=1$，$r_3=3$，$r_4=1$。这就是他在《数书九章》序中所说的“奇余取策，群数皆捐”。后三数即三扐，秦氏谓之“三变”。“以其余数乘诸用数，并名之曰总数”，总数记作Z，本题中$Z_1=12$，$Z_2=24$，$Z_3=12$，$Z_4=9$，

$$Z=\sum Z_i=\sum r_i f_i'=57$$

⑦　依上例取$R_1=33$，将总数$Z=57$“满衍母$(M=12)$去之”，即

$$57\equiv9(\mathrm{mod}\ 12)$$

将9作为被除数，以3为除数(象征三才)。相除得象数三。如果不能整除，有余数1或2，所余部分都看作象数一。例如7或8的象数都是三。由于衍母$M=12$，总数Z无论为何值，余数1，2，…，12被3除所得象数只可能是一、二、三、四其中之一。

注意到，此法①始于水、火、木、金，⑦终于水、火、木、金。

⑧　根据算出的“象数”的值，确定四爻象：

一	二	三	四
老阳	少阴	少阳	老阴
⚌	⚍	⚎	⚏
重爻	拆爻	单爻	交爻

“他皆仿此”，“凡六画乃成卦”。秦九韶最后总结说：“术意谓揲二、揲三、揲四者凡三度，…故曰三变而成爻。既卦有六爻，必一十八变，故‘十有八变而成卦’”。

综上，可与《周易》揲法相比较而得出以下几点结论：

甲、“大衍总数术”前四步(①—④)具有重要的数学意义，其中“大衍求一术”受到《周易》揲法的某些影响，例如后者利用了一次同余式的(分揲)性质；但是，从数论的角度来看，分揲定理与一次同余式组解法之间没有直接的承袭关系，而且秦九韶也不是按照当时流行的观点去解释揲法的。因而，“大衍求一术”不是从《周易》揲法演变而来。

乙、“大衍总数术”后四步(⑤—⑧)除一次同余式算法外，主要目的在于进行占算和解释《周易》揲法，附会经文较为明显，带有易学色彩。但是，秦九韶借用了《周易》揲法的形式，保留了1.“大衍之数五十，其用四十有九”，2.“分而为二”，“挂一”，3.“揲四”，“归奇”，4.以法除实求象数等基本环节，在易学上别树一

积。

丙、"大衍总数术"同《周易》揲法间的区别在于：1."分而为二，以象两"，易法对49所分成的两部分（R_1和R_2）均揲，秦法仅揲其中之一(R_1)。2."挂一以象三"，易法从第一部分中取一(R_1-1)，不参与下一步计算；秦法径取揲一所余之一，参与下一步计算。3.易法"揲之以四，以象四时"，分揲三次谓之"三变"；秦法揲之以二、三、四，凡三度而谓之"三变"。4.所求象数，易法以4除得六，七，八，九；秦法以3除得一，二，三，四，分别转化成四象。

秦九韶为什么在这里要把数学和易学揉合在一起？本文认为一种可能是为了引起当时人们对"大衍求一术"的重视，借易法之名，施秦法之实。这种标新立异带有离经(《易经》之经)叛道(道学之道)的性质，当然不为易学正统所承认，也未被后来筮人所接受。直到清朝编《四库全书》时，四库馆臣对"蓍卦发微"还颇有微言："此条强援蓍卦牵附衍数，致本法反晦"，"竟欲以此易古法则过矣"，"欲以新术改《周易》揲蓍之法，殊乖古义"[8]。但是，这从另一方面证明了秦九韶的思想不受当时道学的局限，他深知"大衍求一术"的价值，企图把它提高到经学的地位，在当时历史条件下，这种努力是可以理解的。唐一行《大衍历议》也是借大衍之名，阮元批评说这是"窜入于易以眩众"[9]，其实以优秀的数学成果"眩众"也未尝不可，只是传统思想认为不能与至高的经书相提并论罢了。一行、秦九韶的这些可以看作是为了提高数学地位的努力，应当给予客观的历史评价。

附：分揲定理及证明

揲法中的"奇数"指1，2，3，4，借用同余式表为

$$R \doteqdot r(\bmod 4),\quad 0<r\leqslant 4$$

与同余式中对余数的规定($0\leqslant r<m$)有别。文中将注明$\doteqdot$。

引理中若$a\equiv b$，$a_1\equiv b_1(\bmod m)$，

则$a+a_1\equiv b+b_1(\bmod m)$，

$$a-a_1\equiv b-b_1 (\bmod m)。$$

分楪定理　已知$R=R_1+R_2(R, R_1, R_2\in N)$

若$R\equiv r(\bmod m)$，$R_1\equiv r_1(\bmod m)$，$R_2\equiv r_2(\bmod m)$

则$r_1+r_2=\begin{cases} r\text{或}m+r\ (r\neq 0), \\ r\ \text{或}\ m\ \ (r=0)。\end{cases}$

证明：将$R_1\equiv r_1(\bmod m)$和$R_2\equiv r_2(\bmod m)$相加，由引理

$$R=R_1+R_2\equiv r_1+r_2(\bmod m)。$$

已知$R\equiv r(\bmod m)$，与上式相减，由引理

$$r_1+r_2\equiv r(\bmod m),$$

亦即$r_1+r_2=km+r(k=0, 1, 2, \cdots)$。

由于$0\leqslant r_1<m$，$0\leqslant r_2<m$，相加可知

$$0\leqslant r_1+r_2<2m。$$

由此　　　$k=0$或1。

当$0<r<m$时，$r_1+r_2=r$或$m+r$，

当$r=0$时，$r_1+r_2=r$或m。证完。

对于揲法规定$0<r_1, r_2, r\leqslant m$，可知

$$0<r_1+r_2\leqslant 2m。$$

同样有$k=0$或1。

当$0<r<m$时，$r_1+r_2=r$或$m+r$。

当$r=m$时，$r_1+r_2=m$或$2m$。

参 参 文 献

〔1〕魏王弼晋韩康伯注、唐孔颖达疏：《周易正义》。

〔2〕见1978年12月长春古文字学术会议文献。

〔3〕朱熹：蓍卦考误，御制朱子全书，康熙五十二年殿本，卷二十六，二十九至四十一页。

〔4〕刘蔚华：谈易数之谜，中国哲学第六辑，20—21页。

〔5〕李俨：大衍求一术的过去和未来，中算史论丛第一集，129页。

〔6〕钱宝琮：秦九韶《数书九章》研究，宋元数学史论文集，70页。

〔7〕莫绍揆：假如没有素数概念该怎么办？数学研究与评论，4(1982)，183页。

〔8〕见《四库全书》总目、提要《数书九章》条。

〔9〕阮元：《畴人传》卷十六，一行传后论。

《数书九章》对《九章算术》的继承和发展

白尚恕　李兆华

《数书九章》(1247)是一部优秀的中国数学著作，其中包括许多遥遥领先于世界的丰硕成果。该书出现在《九章算术》之后约1200年间，书中所载，除"大衍法不载《九章》"之外，其余则多所联系。《九章算术》和《数书九章》标志着中国数学发展中的两个高峰，弄清后者对前者的继承和发展，对于全面评估《数书九章》的学术价值，进一步探讨《九章算术》的成就和对后世的影响，都具有重要意义。以往的研究，对于两书的探讨分别作了不少工作[1]—[5]，取得可喜的成果，但对于其中的继承和发展似无专文。本文的目的在于：试图依据两书的原文及注文，按编写体例、社会反映、题目类型、术名关联、解题方法等方面探讨该书对《九章算术》的继承和发展，以作为深入探讨的一个开端。至于两书无甚直接联系的内容，虽属重要，亦不涉及。

一、在编写体例方面的继承和发展

初步考证，《九章算术》成书于东汉初期，并非出自一人之手，很可能经过多次修改删补逐渐形成定本。所以其体例前后略有差异，并不完全一致。

《九章算术》采取问题集的形式，全书共有246道应用问题，212术。按问题的性质及其解法厘为九类，每类立为一章。

每章的问题多寡不定，但每问之后必有答案。至于术文，有的是一问一术，有的是多问一术，或一问多术，有的术文列在问

前，大都是把术文列在问后。在术文之前有的冠以术名，有的则未冠术名。

方田第一章，共38问21术。除8术是分数运算外，其余都是各种平面图形的面积算法。粟米第二章，共46问33术。在章名粟米之下，列有二十种粮食兑换比率表，表后给出今有术。章末列出今有术的特殊情况：经率术、经术术、其率术、反其率术。衰分第三章，共20问22术。除给出衰分术、返衰术外，每问后列有未冠术名之术。少广第四章，共24问16术。章首列有少广术，章末有开方术、开圆术、开立方术、开立圆术等。商功第五章，共28问24术。其中各问多是通过土建工程推求各种立体体积的算法。均输第六章，共28问28术。在第一问之后列出均输术。盈不足第七章，共20问17术。章中列有盈不足术，两盈两不足术等。方程第八章，共18问19术。章中列有方程术、正负术，以及刘徽的方程新术和其一术等。句股第九章，共24问22术。除前三术冠以句股术术名之外，其他都是依题设术未冠术名。

《九章算术》中问后有答，答后或问前都有术文。但经文中没有细草。

《数书九章》也采用问题集的形式，全书共集81道应用问题，均分为九类。除第一类按解题方法分类外，其他都是按问题的性质分类的，即大衍类、天时类、田域类、测望类、赋役类、钱谷类、营建类、军旅类、市物类。《数书九章》全书共18卷，每卷所列问题多寡不一，每问之后有答，答后有术，术后有草。有的草后具有算图，有的配有示意图。《数书九章》中的问、答、术、草都有一定的格式，而算图、示意图则是根据具体情况而定。

《九章算术》所集246问，未编题号。而每问之始，必写“今有”或“又有”一类的词句，然后叙述问题的已知条件及数据；问末则写“问某某几何。”《数书九章》所集81问虽无题号，但于每问之前都冠以四字组成的题名。每问之始，必写“问”或“问有”一类的词句，然后叙述已知条件及数据；问末则写“欲知某某几何”或

“欲某某几何。”

《九章算术》与《数书九章》两书，都采用问题集的形式，把所集问题分为九类，有问、有答、有术。虽然两书分类的标准不一，问题的模式不同，问、答与术的次序有异，但是，若就其体例而论，后者不仅是继承了前者，而且对前者有所发展。例如“取八十一题，厘为九类”，每题一名，每问一术，且“立术具草，间以图发之。”

二、在反映各种制度方面的继承和发展

在《九章算术》246道问题中，大部分反映了秦、汉时代的各种制度。方田章方田术称：“广从步数相乘得积步。以亩法二百四十步除之，即亩数。百亩为一顷。”其中所用步法、亩法、顷法都是秦汉时代的制度。

衰分章第一问为：“今有大夫、不更、簪袅、上造、公士凡五人，共猎得五鹿。欲以爵次分之，问各几何。”其中大夫、不更、簪袅、上造、公士都是秦代官爵名称，汉因秦制，也用此等爵名。

均输章的均输术就是根据均输律编制的计算方法。这反映了西汉初期的赋税制度。衰分章第五问为：“今有北乡算八千七百五十八……”。其中“算”是秦、汉时代的赋税计算单位。如《史记·平准书》称：“算，汉律。人出一算，一算百二十钱，贾人与奴婢倍算。”

除上述在度量衡、官爵制度、赋税制度、银钱借贷和地亩典当等方面直接或间接地反映了秦、汉时代的情况外，其他在工作量、物品规格。物物交易和物品价格等方面也有不少描述。可见《九章算术》的大部分内容都反映了秦、汉时代的社会各种制度及各种情况。

《数书九章》大部分内容也反映了南宋时代的社会情况。如在

度量衡方面，斜荡求积题称："里法三百六十(步)，亩法二百四十步，顷法一百亩。"均分梯田题称："角法六十步。"在工作量方面，推计土功题称："春程人功平方六十尺。"军器功程题称："七人九日造弓八张，八人六日造刀五副，三人二日造箭一百五十只。"在物品规格方面也有所反映，如积尺寻源题称："大方一尺三寸，小方一尺一寸，城砖长一尺二寸、阔六寸、厚二寸五分，六门长一尺、阔五寸、厚二寸。"在物价方面也有所论述，如推求物价题称："沉香每裹三百贯文，乳香每套六十四贯文，玳瑁每斤一百八十贯文。"均货推本题称："金每两四百八十贯文，盐每袋二百五十贯文，银每两五十贯文，度牒每道一千五百贯文。"在利率方面也有论及，如推求典本题称："月息利二分二厘。"推求本息题称："息例：万贯以上一厘，千贯以上二厘五毫，百贯以上三厘。"在赋税方面则有较多的反映，如围田租亩题称："上等每亩起六斗，中等四斗五升，下等四斗。"户税移割题称："每亩苗三升五合，(每亩)税一尺一寸五分，物力一贯二百，本等地细一尺三寸四分。"在军队建制方面也曾提及，如计立方营题称："一军三将，将三十三队，队一百二十五人。"方变锐陈题称："军一万二千五百人。"

由以上所述可以看出，《数书九章》大部分内容反映了南宋时代的各种制度及社会情况。很明显，《数书九章》不仅是受《九章算术》的深刻影响，而《数书九章》所记载的史料具有一定的真实性，既反映了南宋社会的复杂性，又反映了南宋苛捐杂税的繁重，也说明南宋各种制度的极不统一。《数书九章》提供了具有重要价值的历史素材，也是一部了解南宋社会情况的参考文献。

三、在题目类型方面的继承和发展

《九章算术》共246道问题，《数书九章》则有81道问题。而《数书九章》的多数问题——包括下文所说的基本题及构成综合题的

若干小题，仍属于《九章算术》基本类型。

1. 基本题是以《九章算术》题为范例

《数书九章》中有些题比较简单，而且又是基本的，由于其中所包括的方法是常用的，所以这类题比较明显地表现出《九章算术》的范例作用。

如算回运费题："问有江西水运米一十二万三千四百石，原系至镇江交卸，计水程二千一百三十里。每石水脚钱一贯二百文，十七界会子。今截上件米就池州安顿，池州至镇江八百八十里。欲收回不该水脚钱几何。"

这题是运米2130里，需水脚钱1.2×123400贯，今运米880里，需水脚钱多少？是粟米类问题。

又如分定纲解题："问州郡合解诸司窠名钱。户部九十六万五千四百二十一贯文，总所六十四万三千六百一十四贯文，运司一万六千九十贯三百五十文。今诸窠名先催到九千二百五十三贯六百二十文，欲照原额分数均定桩米俟解，合各几何。"

这题是按965421000，643614000，16090350的比率，即60，40，1的比率分配9253620文钱。是衰分类问题。

又如均敷徭役题："问军戍坐烽摆铺，切虑差徭不均。今诸军共合差一千二百六十人，契勘诸军见管，前军六千一百七十人，右军四千九百三十六人，中军七千四百四人，左军三千七百二人，后军二千四百六十八人。各军合差几何。"

这题是按5，4，6，3，2的比率分配合差的1260人，也是衰分类问题。其他如围田租亩题、筑埂均劳题、均科绵税题等都是属于基本的衰分类问题。

2. 综合题是由基本题并列或更迭组成

《数书九章》的题，一般较《九章算术》的题为庞大，且数字繁杂，甚至有的题竟占用整整一卷书。如果把这些庞大的题加以分割，则不难发现，这些大题往往是由几道小题并列构成的，而每一小题仍属于《九章算术》的基本类型题。

如课籴贵贱题："问差人五路和籴，据甲浙西平江府石价三十五贯文，一百三十五合，至镇江水脚钱每石九百文。安吉州石价二十九贯五百文，一百一十合，至镇江水脚钱每石一贯二百文。江西隆兴府石价二十八贯一百文，一百一十五合，至建康水脚钱每石一贯七百文。吉州石价二十五贯八百五十文，一百二十合，至建康水脚钱每石二贯九百文。湖广潭州石价二十七贯三百文，一百一十八合，至鄂州水脚钱每石二贯一百文。其钱并十七界官会，其米并用文思院斛，交量细数。欲皆以官斛计石钱，相比贵几何。"（文思院斛，每斗八十三合。）

这题是因平江、安吉、隆兴、吉州、潭州五地量器不一，欲折合成官斛而后比较石价（包括运费）的贵贱。以安吉为例，每斗110合，石价及水脚钱共(29000＋1200)文，又知官斛每斗83合，问官斛每石米价并水脚钱多少。这是一个粟米类问题。其他四种情形与此同，故知这题是由五个粟米类题并列构成的；其他如互易推本题，则是由度牒、盐、布、绢、银互易的四个粟米类题构成的。菽粟互易题则是由菽易麻、由小麦易米两个粟米类题构成的。此外，如户田均宽题，是由两个衰分类题并列而成；推求本息题，显系是由三个衰分类题并列而成；复邑修赋题，则是由二十一个衰分类题组成的。

除用基本题并列组成的综合题外，还有用基本题更迭组成的综合题。如米谷粒分题："问开仓受纳，有甲户米一千五百三十四石到廊，验得米内夹谷。乃于样内取米一捻，数计二百五十四粒，内有谷二十八颗。凡粒米率每勺三百。今欲知米内杂谷多少，以折米数科责及粒各几何。"

这题是按$\frac{226}{254}$，$\frac{28}{254}$的比率分配1534石米及其夹杂的谷；然后又按粟米之法将所夹的谷折合为米；最后算出总米数若干粒。其前一步属于衰分类题，后一步乃是粟米类题。

又如均货推本题："问有海船赴务抽毕，除纳主家货物外，有沉香五千八十八两，胡椒一万四百三十包（包四十斤），象牙二

百一十二合(大小为合，斤两俱等)。系甲乙丙丁四人合本博到。缘昨来凑本互有假借，甲分到官供称，甲本金二百两，盐四袋钞一十道。乙本银八百两，盐三袋钞八十八道。丙本银一千六百七十两，度牒一十五道。丁本度牒五十二道，金五十八两八铢。已上共估值四十二万四千贯。甲借乙钞，乙借丙银，丙借丁度牒，丁借甲金。今合拨各借物归原主名下，为率，均分上件货物。欲知金银袋盐度牒原价及四人各合得香椒牙几何。"

这题是甲、乙、丙、丁四人合本博利，甲出金，乙出盐，丙出银，丁出度牒。互有假借之后，所出本钱各为共值的四分之一。因之，先求金、银、盐、度牒的单价，是一"方程"类题。再以各人原有本钱为衰，分配博到沉香、胡椒、象牙三物，是三个并列的衰分类题。这是由四题更迭而成的综合题。

《数书九章》中的题是根据当时社会经济和科技的实际经过一番数学提炼形成的。秦氏在序中所说"探索杳渺，粗若有得"、"积多而惜其弃，因取八十一题"即是对这一提炼的说明。另外，通过对各题的核算，不难发现，尽管一些题的数据庞杂，但运算起来其结果却很简洁，这种数字上的巧妙，又是这一提炼的说明。

还可以看出，在提炼中，这些题是以《九章算术》的题为范例。有些题，或者直接套用《九章算术》题的格式，或者把《九章算术》的基本题综合成一大题。所以《数书九章》题就表现出以《九章算术》为基础的规范性。从简单的题来看，这种规范性是显见的；对于综合题，一经分割成几个基本题，其规范性便立即可见。一般说来，构成综合题的基本题之间，其关系并不紧密。如复邑修赋题，若将应纳的苗米、和买数及夏税的计算任意删去其中一项或两项，则另一项的计算将不受影响，这种并列可称为无关并列。另一种则不然，如均货推本题，是由"方程"类题与衰分类题更迭而成的，但若不解"方程"则无法进行衰分的计算，因后一步计算要用到前一步的结果。所以无妨把这种并列称为相关并列或更迭。如果综合题是由基本题无关并列而成的，视为基本题的横向发展，

而综合题由基本题相关并列而成的，则应视为基本题的纵向发展。因此，《数书九章》的题具有这样一个特点，一方面是继承了《九章算术》题的规范性，一方面是向纵、横方向发展了这种规范性。

四、在术名方面的继承和发展

《九章算术》共212术，但凡章名都代表该章的基本的术。如刘徽注说："凡九数以为篇名，可以广施诸率，所谓告往而知来，举一隅而三隅反者也。"可见《九章算术》的章名既代表该章的基本术，也表示是一个重要的术。

《数书九章》集81问，每问一术，共81术。每一术文都列在答案之后，术文之前悉未冠诸术名，但在"术曰"二字之后，一般写有"以某某求之"或"以某某求之，以某某入之"。如推库额钱题后"术曰：以大衍求之。"治历演纪题后"术曰：以历法求之。"三斜求积题后"术曰：以少广求之。"军器功程题后"术曰：以粟米求之，互换入之。"其中除"大衍"及"历法"不是《九章算术》原术外，其他如方程、少广、商功，均输、衰分，句股、粟米、方田等都是《九章算术》的原名。而互换、率变、夕桀、招法、翻法等可能另有一番来历。

《数书九章》算回运费题"术曰：以粟米互易求之。"课籴贵贱题"术曰：以粟米互换求之。"军器功程题"术曰：以粟米求之，互换入之。"互易推本题"术曰：以粟米互乘易法求之。"菽粟互易题"术曰：以粟米换易求之。"

《九章算术》粟米章之首刘徽注称："以御交质变易"。今有术注称："此都术也"。均输章第10问注称："置今有青丝一斤，以练率三百八十四乘之为实，实如青丝率三百九十六而一，所得青丝一斤用练丝之数也。又以络率十六乘之所得为实，以练率十二为法，所得即练丝用络丝之数也。是谓重今有也。虽各有率，不问中间。故令后实乘前实，后法乘前法而并除也。"又称："凡率错互

不通者，皆积齐同用之。放此，虽四五转不异也。”可见刘徽不但把今有术看作是处理互相交换变易问题的方法，而且认为是可以举一反三的总法，并推广到重今有术，从而给出重今有术的意义和运算方法。

至于术名，自《九章算术》成书到刘、李注释时止，把四项比例算法都称为今有术。到宋代，可能废弃今有术一名而改用他名。如杨辉在《续古摘奇算法》中称今有术为互换术，称重今有术为重互换术。在《详解九章算法》中，把今有术称为互换乘除法，用今有术解的题称为粟米互换之问或互换之问。在当时，取代今有术之新名，还未形成统一、固定的名称。所以秦氏所说“粟米互易”、“粟米互换”、“粟米互乘易法”、“粟米换易”，实际就是继承《九章算术》及刘徽之说。

《九章算术》句股章所列方法，除句股原理、句股比率外，其他多系利用句股和差解句股形的方法。至于重差术，刘徽曾说：“徽寻九数有重差之名，原其指趣乃所以施于此也。凡望极高、测绝深而兼知其远者必用重差，句股则必以重差为率，故曰重差也。”他还列举了“日去地”、“日去人”所用的重差术。

《数书九章》中望山高远题术曰：“以句股求之，重差入之。”由具体算法来看，实即刘徽所说的重差术。陡岸测水题术曰：“以句股重差求之。”其具体算法与刘徽重差术略有不同，实际上也可看作是重差术。虽然表望方城题术文也是“以句股重差求之。”但其算法用到句股比率，在比率中只用到两个差数，这并非刘徽的重差术。望敌远近题术曰：“以句股求之，重差入之。”其算法只用到两个差数的句股比率，也不是刘徽所说的重差术。如顾观光于《九数存古》中说：“此借高以测远，非重差也。”此外，望敌圆营题术文“以句股夕桀求之。”遥度圆城题术文“以句股夕桀求之。”都是指句股比率的乘方运算，而望知敌众题术文“以句股求之。”是指句股比率。临台测水题术文“以句股变法兼少广求之。”漂田推积题术文“句股入之。”则是指句股原理的。

秦氏所说的句股术，既指句股原理，也指句股比率。秦氏所说的句股夕桀术，当是指句股比率的乘方运算。而秦氏所说的句股重差术，既指两个差数的句股比率，也指两个句股比率的差，还包含所谓刘徽的重差术。可见秦氏所用术名，其内涵较为广泛，不但继承了《九章算术》及刘徽之说，也使之有所发展。

至于秦氏所用均输、衰分、方田、少广、商功等名称，都是继承了《九章算术》中的原名，在运算中并有所发展。

五、在解题方法方面的继承和发展

与题目类型方面的继承和发展相类，《数书九章》在解题方法方面也存在着对《九章算术》的继承和发展。

1. 单独或联合运用《九章算术》的解题方法

《数书九章》的81条术文中，注明"以某某求之"的有68条。除与大衍术等有关的 7 条外，其余61条均与《九章算术》的章名有关。这一方面表示该题属于《九章算术》中相应一章的范畴，另一方面表示该术导源于《九章算术》中相应的一章。事实上，两书在术文上，或者说在解题方法上，确实存在着这种联系。

例如，上文提到的算回运费题的术文是："以粟米互易求之。置池州至镇江里数乘水脚钱，得数又乘运米，为实。以原至镇江水程为法。除实得收回钱。"术文指示：

$$收回钱数=\frac{(水脚钱\times 石数)\times 池州至镇江里数}{原至镇江里数}。$$

《九章算术》粟米章今有术曰："以所有数乘所求率为实，以所有率为法。实如法而一。"亦即

$$所求数=\frac{所有数\times 所求率}{所有率}。$$

比较上面两个公式可见，秦氏是按粟米互易的计算原理求得该题答案，他的术文与今有术具有相同的形式。

又如分定纲解题的术文是："以衰分求之。置诸原率(可约，约之)，副并为法，以催到钱乘未并者各为实。实如法而一。"该术文即：

$$各得钱数=\frac{各率}{各率之和}\times 催到钱数。$$

《九章算术》衰分术曰："各置列衰，副并为法，以所分乘未并者，各自为实。实如法而一。"该术即

$$所得数=\frac{各衰}{各衰之和}\times 所分数。$$

刘徽注云："列衰，相与率也。重叠，则可约。"秦术与《九章算术》中的相同，只是把"衰"改为"率"。此外，均敷徭役题所用的也是衰分术。

课籴贵贱题是五个粟米问题并列构成的，相应地，其解法则是重复地运用今有术。术云："以粟米互换求之。置石价并水脚，乘官斗合数为实。各如本州合数而一。各得官斛石钱，以课贵贱。"此即五次运用公式

$$官斛石价=\frac{(原石价+水脚钱)\times 官斛每斗合数}{原每斗合数},$$

分别得到各种米的石价。这显然是今有术的重复使用。

又如，复邑修赋题则是二十一次运用衰分术。

还有一些题目是几种不同方法联合运用。如均货推本题的术文则是方程术和衰分术的并用。术曰："以方程求之，衰分入之，正负入之。置共钱以人数约之，得数，列如人数，各为行积。次置诸色各物数，为段子，对本色。有分者通之，可约者约之，为定率(以第一行为右，以第二行为副，以第三行为次，第四行为左)。每以下位互遍乘之，每验其积，以少减多。如同名相减，异名相加，正无入负之，负无入正之。如同名相加，异名相减，正无入正之，负无入负之。得一段为法，以除积为实。除之，各得诸价。以诸价列右行，以各物数列左行，以两行对乘各得本率。

以诸色求等，约之，得列衰。并诸衰为总法。以列衰遍乘各物诸数，各为实。诸实并如总法而一，各得其物。除不尽者，以斤两通而除之，或又分母命之。”该术文第一部分是方程术和正负术。方程术较《九章算术》中的有所发展，于后文另论。其正负术与《九章算术》中的相同。该术文第二部分是衰分术。以金价、盐价、银价、度牒价分别乘其数量，各得本率。约分后得列衰248，152，247，201。以此为衰，分配沉香、胡椒、象牙三物。这是三次运用衰分术。故该术文是方程术与衰分术并用。

更多的例子说明，《数书九章》的解题方法特点之一是单独地或联合地运用《九章算术》的各术。

2． 对《九章算术》解题方法的发展

除上述特点之外，《数书九章》还对《九章算术》中的某些解题方法予以发展。虽然一般还沿用《九章算术》中的名称，但其内容与水平都超出原有的各术。

今有术的发展

在宽减屯租、互易推本、菽粟互易以及推计互易等题中，给出了一种“雁翅算法”。这是一种发展了的今有术，用于比较复杂的比例问题。这种算法的术文是：“如雁翅列，常以多一事者相乘为实，少一事者相乘为法”。

例如，互易推本题：“问出度牒差人营运。每三道易盐一十三袋，盐二袋易布八十四匹，布一十五匹易绢三匹半，绢六匹易银七两二钱。今趁到银九千一百七十二两八钱，欲知原关度牒道数几何。答曰：度牒一百八十道。”按该题术草给出算式如下：

度牒	3
盐	2，13
布	15，84
绢	6，3.5
银	91728，72

把这个雁翅状算式的斜上行五个数字相乘为实，斜下行四个数字

相乘为法，实如法即为原关度牒数。即

$$度牒数=\frac{3\times2\times15\times6\times91728}{13\times84\times3.5\times72}=180。$$

事实上，按照今有术，由银和绢的比例起算，依次可得绢、布、盐、度牒数如下

度牒	$\frac{3\cdot2\cdot15\cdot6\cdot91728}{13\cdot84\cdot3.5\cdot72}$，	3
盐	$\frac{2\cdot15\cdot6\cdot91728}{84\cdot3.5\cdot72}$，	2，13
布	$\frac{15\cdot6\cdot91728}{3.5\cdot72}$，	15，84
绢	$\frac{6\cdot91728}{72}$，	6，3.5
银	91728，72	

这样得到的度牒数恰是，分子为斜上行五数连乘，分母是斜下行四数连乘，与术文完全相符。这样一个复杂的比例问题，若按今有术逐步计算需四次才可完成；但按雁翅算法则直接得出结果且规律明确程序清楚。

秦氏还运用这种算法的规律解决了逐次运算结果的通分问题。由于逐次结果的分母相同，故各次结果的比即等于其分子之比。一般说来，比例问题中含有分数时，若比例次数越多，则结果中的分数越复杂，因而逐次结果欲化为同分母愈趋烦琐。由于比例算法是中国古代数学中的一个重要内容，因而与之相关的通分问题也早为古代数学家所重视，正如《张邱建算经》所说："夫学算者，不患乘除之为难，而患通分之为难"。[6]下面通过推计互易题说明秦氏的这一创新。该题是："问库率，糯谷七石出糯米三石，糯米一斗易小麦一斗七升，小麦五升踏曲二斤四两，曲一十一斤酝糯米一斗三升。今有糯谷一千七百五十九石三斗八升，欲出谷、做米、易麦、踏曲，还自酝余谷之米，须令适足，各合几何。"原书仍列算式如下：

谷	7
米	10，3
麦	5，17
曲	11，2.25
米	13

将麦曲之比化为整数，把曲和酝米之比化为曲和酝谷之比，以便求得出谷和酝谷的总数。

谷	7
米	10，3
麦	20，17
曲	33，9
谷	91

在此基础上进行三步运算得到各物之间的整数比。

Ⅰ）"上四位进乘"：斜上行四数由下至上相乘。

Ⅱ）"下四位退乘"：斜下行四数由上至下相乘。

这样得到原书中的合图。

谷 $\dfrac{33\cdot 20\cdot 10\cdot 7}{(3\cdot 17\cdot 9)}$

米 $\dfrac{33\cdot 20\cdot 10}{(17\cdot 9)}$，3

麦 $\dfrac{33\cdot 20}{(9)}$，$3\cdot 17$

曲 33，$3\cdot 17\cdot 9$

谷 $\dfrac{91\cdot 3\cdot 17\cdot 9}{(3\cdot 17\cdot 9)}$

斜上行各数在原图中只写出分子，分母是本文由今有术计算后补出并加括号区别。下四位退乘是为斜上行诸分数通分作准备。由于斜上行四数最大的分母是$3\cdot 17\cdot 9$，欲以此为公分母通分的话，酝谷的分子必须同乘以$3\cdot 17\cdot 9$变为$91\cdot 3\cdot 17\cdot 9$，而这正好是斜下行四数相乘。

Ⅲ）“四行相对，有者乘之”。是将米、麦曲斜上行的三个数通分，使其公分母与出谷、酝谷的分母相同。此时，米、麦、曲的分子须分别乘以3，3·17，3·17·9，而这三个数是斜下行数退乘得到的。

谷 $\frac{33\cdot20\cdot10\cdot7}{(3\cdot17\cdot9)}$

米 $\frac{33\cdot20\cdot10\cdot3}{(3\cdot17\cdot9)}$，3

麦 $\frac{33\cdot20\cdot3\cdot17}{(3\cdot17\cdot9)}$，3·17

曲 $\frac{33\cdot3\cdot17\cdot9}{(3\cdot17\cdot9)}$，3·17·9

谷 $\frac{91\cdot3\cdot17\cdot9}{(3\cdot17\cdot9)}$

这样得到出谷、做米、易麦、踏曲、酝谷之比是上图诸分数的分子之比，将各分子乘出之后依次是

46200，19800，33660，15147，41769。

以此为衰，以出谷加酝谷数87969为法，以今有谷数175938为实，由衰分术各得出谷、做米、易麦、踏曲、酝谷数。最后由谷米之率7:3得酝米数。

在有关雁翅算法的几题中，秦氏明确指出：“以粟米求之，互易入之”，“以粟米求之，互乘易法入之”，“以粟米换易求之”。这说明雁翅算法是处理粟米交质变易方法——今有术的发展。

开方术的发展

正负开方术是《数书九章》的杰出成果之一，它已远远超出《九章算术》开平方、开立方的范围而成为一种求解高次方程正根的一般方法。该两书中的开方术代表着中国数学中两种不同的开方系统，其主要差别在于计算程序不同。若就数学原理而言，则两者完全相同。从这一点出发可以认为，正负开方术是把《九章算术》开方术的原理推到开高次方并改善计算程序的结果。

《数书九章》推知粜数题需要求解方程

$$4.608x^3=72000000000000.$$

按照术文，首先将其进行倍根变换，得

$$4.608(10000x_1)^3=72000000000000,$$

其中$10000x_1=x$，估计得$x_1=2$。然后进行减根变换得

$$4.608(1000x_2)^3+276480(1000x_2)^2$$
$$+5529600000(1000x_2)=35136000000000,$$

其中$1000x_2=x-20000$，以方约实，即略去高次项，以x_2的系数除常数项得$x_2=5$。

按照术文，继续减根，常数项变为零，说明这一正根已求出，此时，$x=20000+1000x_2=25000$。

《九章算术》少广章第十九题，需要求解方程

$$x^3=1860867。$$

按照术文，将方程进行倍根变换，得

$$(100x_1)^3=1860867,$$

其中$100x_1=x$，估计得$x_1=1$。然后进行减根变换得

$$(10x_2)^3+300(10x_2)^2+30000(10x_2)=860867,$$

其中$10x_2=x-100$，略去高次项，以x_2的系数除常数项，得$x_2=2$。继续作减根变换得

$$x_3^3+360x_3^2+43200x_3=132867$$

其中$x_3=x-120$，同样的方法求得$x_3=3$。

按照术文，进行减根，常数项变为零，说明方根开尽，此时$X=120+x_3=123$。

若记 $$f(x)=ax^3-b=0,$$

在上述两例题的第一步中，首先经倍根变换，估计得根的第一次近似值α。然后进行减根变换，即令$y=x-\alpha$，亦即$x=\alpha+y$，代入方程$f(x)=0$，有

$$a(\alpha+y)^3-b=0$$
$$ay^3+3a\alpha y^2+3a\alpha^2y=b-a\alpha^3$$

略去高次项，由y的系数除常数项，得

$$y=\frac{b-a\alpha^3}{3a\alpha^2}=\frac{-f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

由此

$$x=\alpha+y=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}。\qquad (*)$$

这就是上述两例的求根公式。上述推知余数题是《数书九章》中一个较简单的方程题，次数最高者达十次。无论方程的简单与复杂，该书二十余个高次方程的解法原理相同。《九章算术》开平方、开立方原理相同。因此，上述(＊)是两书开方术共同的求根公式。《九章算术》只载有开平方、开立方术，至宋代，开方次数推广到三次以上，因而出现了贾宪三角形。贾宪三角形的构造原则又指示了寻求减根变换后各系数的简便方法——增乘开方法，秦氏又总其大成给出正负开方术，而《九章算术》开方术的原理一直被保留着。

盈不足术的发展

《数书九章》给出了被后世算家称为"双套盈朒"的问题和解法。其卷十六的计造军衣题是盈朒、两盈、一朒一足三个问题并列构成的。今以盈朒问题为例说明秦氏这一工作。

这一问题是："问……计料欲制军衣，其布六人八匹少一百六十匹，七人九匹剩五百六十匹，……欲知军士及布……各几何。"按其术文分下列五步计算。

Ⅰ）置人数于左右之中，置所给物各于其上，置盈朒数各于其下。

布	9	8
人	7	6
盈朒	560	160

Ⅱ）令维乘之。先以人数互乘其所给率，相减余为法。次以人数相乘为寄。

法	2	
未减	54	56
寄	42	
盈朒	560	160

Ⅲ）后以盈朒互乘其上未减者。

法	2
上	8640，31360
寄	42
盈朒	560，160

Ⅳ）以上下皆并之，其上并之为物实，其下并之乘寄为兵实。

法	3
物实	40000
兵实	30240

Ⅴ）二实皆如法而一，各得

布	20000
兵	15120

秦氏给出的盈朒问题一般形式为："a_1人出b_1盈c_1，a_2人出b_2不足c_2，问人、物各几何。"若记人数为x，物数为y，则相当于求解方程组

$$\begin{cases} \frac{b_1}{a_1}x=y-c_1 \\ \frac{b_2}{a_2}x=y-c_2 \end{cases}$$

秦术相当于给出该方程组的解

$$\begin{cases} x=\frac{a_1a_2(c_1+c_2)}{a_2b_1-a_1b_2} \\ y=\frac{a_2b_1c_2+a_1b_2c_1}{a_2b_1-a_1b_2} \end{cases}$$。

《九章算术》的盈朒问题相当于$a_1=a_2=1$这一特殊情形，故解法亦较简单。在明代算书中"双套盈朒"问题已属多见。程大位(1533——1606)说："盈不足及两盈两不足及盈适足不足适足三宗，皆先贤旧法。自刘氏通明，吴氏比类始增双套者"。殊不知在刘仕隆《九章通明算法》(1424)之前，秦氏早已阐明。

《数书九章》卷十二的累收库本题谓"以盈朒变法求之"。本题是一与等比数列有关的问题。《九章算术》盈不足章第十一、十二两题都与等比数列求和有关，其解法用盈不足术。但因等比数列求和导致指数函数的出现，故以盈不足术求解必有误差。此事直

至清末方由蔡锡勇、华蘅芳等明确指出[7]-[8]。秦氏于累收库本题完全不用盈不足术而谓"以盈朒变 法 求 之"，"变 法"二字，或谓《九章算术》该法当有所变通吗？

方程术的发展

《数书九章》的缀术推星，推求物价、均货推本等 题 谓"以方程求之"。方程为《九章算术》之一章，其解法用直除法。秦 氏 虽谓以方程求之，但完全不用直除而与现在解多元一次方程组的方法基本一样，其中包括互乘相消、代入法，以系数的最大公约数除方程两边等等。

均货推本题需解下列方程组

$$\begin{cases}200x+40y=106000\\264y+800z=106000\\1670z+15w=106000\\58\dfrac{1}{3}x+52w=106000。\end{cases}$$

其解法分为下列三步：

Ⅰ）先将第四个方程两边乘以3，然后对每个方程求系数的等数，依次是40，8，5，1。以此分别约各方程两边，得

$$\begin{cases}5x+y=2650 & (1)\\33y+100z=13250 & (2)\\334z+3w=21200 & (3)\\175x+156w=31800。 & (4)\end{cases}$$

Ⅱ）互乘相消先求出一元。

(3)×156－(4)×3，得

$$52104z-525x=2353200 \quad (5)$$

(1)×105＋(5)×1，得

$$105y+52104z=2631450 \quad (6)$$

令(2)，(6)联立，(6)×11－(2)×35有

$$569644z=28482200$$

$\therefore \quad z \doteq 50$。

Ⅲ）代入法，求其余各元。

将z代入(2)得y，将y代入(1)得x，将x代入(4)得w。由此得原方程组解

$$\begin{cases} x=480 \\ y=250 \\ z=50 \\ w=1500。\end{cases}$$

《九章算术》方程术所用直除法当系数较大时运算不便。刘徽注九章时曾对二元一次方程组使用互乘相消法。秦氏不仅推广到二元以上且在互乘相消时运用了等数概念。如(2)、(6)联立时，因(33，105)=3，故秦氏不用33与105互乘而是先求出等数3，约去后再行互乘。此外，秦氏更明确地提出代入法。这样使得方程组解法较《九章算术》推进了一步。在《数书九章》的其它几个方程组问题中，还有一些关于方程术的论述，也较《九章算术》具体，兹不赘述。

《九章算术》在中国"为算经之首，盖犹儒者之六经，医家之难素，兵法之孙子"[9]，在隋唐时已为数学教育的课本。秦氏早年"访习于太史，又尝从隐君子受数学"。他在《数书九章》序中称："九章所载即周公九数"，"独大衍法不载九章"。因而秦氏认真地研究过《九章算术》是无疑义的。南宋时代，由于生产、交换及科技的发展，所提出的数学问题较汉代更复杂。实际需要以及个人条件，使得秦氏有可能对《九章算术》的算法和理论作出发展。

和中国古代的其它数学著作相比，《数书九章》所表现出的《九章算术》的特色和影响非常明显。上文所论及的诸点，显然，不是一种简单的摹仿而是脱胎的痕迹，它包含着《数书九章》对《九章算术》的突破。李倍始(Libbrecht)曾从《数书九章》和《九章算术》的某些联系得到结论说，宋元数学著作是作为古代数学著作的扩充和重复，并且认为，这是一些数学家发挥天才的障碍，也

是中国数学最终停滞不前的主要原因[10]。事实上，《数书九章》并非《九章算术》的简单扩充和重复，是有发展的。秦氏的正负开方术离不开《九章算术》开方术这一基础，而大衍术无论从哪个方面都已突破《九章算术》的限制。至于中国数学曾有过一段停滞不前的历史，其原因乃是目前数学史界讨论中的一个问题，估计原因是多方面的，不能简单地认为是《九章算术》的副作用。

《数书九章》作为一部中国古代数学的优秀著作，作为十三世纪中国数学著作的代表，是因为它具备了两方面的条件。第一，正如本文开始时所说的，其中包括许多遥遥领先于世界的丰硕成果。第二，它对《九章算术》为代表的中国古代数学的理论、方法作出了重要的继承和发展。

参 考 文 献

〔1〕宋景昌，《数书九章札记》，宜稼堂本。
〔2〕钱宝琮，秦九韶《数书九章》研究，载钱宝琮等《宋元数学史论文集》，(1966)。
〔3〕U. Libbrecht, Chinese Mathematics in the Thirteenth Century. (1973)。
〔4〕吴文俊主编，《〈九章算术〉与刘徽》，(1982)。
〔5〕白尚恕，《〈九章算术〉注释》，(1983)。
〔6〕《张邱建算经》序，钱宝琮校点《算经十书》本，(1963)。
〔7〕《同文馆算学课艺》卷二，光绪间石印本。
〔8〕华蘅芳，《算草丛存》卷三，光绪十九年刊本。
〔9〕杨辉，《详解九章算法》纂序，宜稼堂本。
〔10〕同〔3〕，第16页。

“蓍卦发微”初探

李　继　闵

“蓍卦发微”列于《数书九章》八十一问之首。秦九韶又在是书序言中称：“圣有‘大衍’，微寓于《易》。奇余取策，群数皆捐。衍而究之，探隐知原。”可见他将《周易》所载揲蓍卜筮之法视为天算中求一术之远源，置于异常显要的地位。

以往的数学史研究，将“蓍卦发微”当作以数学附会儒经的典型而对此多所指谪。批评秦氏“极尽穿凿附会的能事”，“使得我国古代数学在整数论方面的辉煌成就无端沾染着一层数字神秘主义的色彩。”并且认为“‘蓍卦发微’的思想根源和唐一行《大衍历议》的‘窜入于易以眩众’如出一辙。”①

秦九韶撰“蓍卦发微”其原意何在？它果真是一无可取、荒诞不经的糟粕么？认真探讨这个问题无疑有助于全面了解秦九韶的数学思想与哲学观点。

一

《周易》为儒家重要经典之一，是一部占卜用书。相传为周人所作，据近代之考证它最后成书于战国后期。其内容包括《经》和《传》两部分。《易经》主要是六十四卦和三百八十四爻，有卦辞、爻辞为之说明，作为占卜之用；《易传》包含解释卦辞、爻辞的七种文辞共十篇，统称《十翼》。《周易》通过八卦形式推测自然和社

① 见钱宝琮：《秦九韶〈数书九章〉研究》及《宋元时期数学与道学的关系》。

会的变化，认为阴阳两种势力的相互作用是产生万物的根源，提出“刚柔相推，变在其中矣”等富有朴素辩证法的观点。《周易》虽然含有迷信成分，但它是中国古代系统的哲学著作，也是世界上最早的系统哲学著作之一。

《周易》用阴阳八卦来解释宇宙间万事万物发生发展和各种现象的根源，成其为一种哲学的本体论。《易·系辞上》称：“易有太极，是生两仪。两仪生四象，四象生八卦，八卦定吉凶，吉凶生大业。”认为“太极”①是派生万物的本原，由太极分出阴、阳“两仪”②，这两仪互相作用而产生了太阴、太阳、少阴、少阳等“四象”③，再由四象继续与阴阳相互作用，于是便生成“八卦”，而八卦便可定吉凶祸福，主宰大业的成败。

阴阳说是《周易》的根本。“易”，即“变易”、“变化”之意，阳极则变阴，阴极则变阳，阴阳互变。所谓“一阴一阳之谓道”，即是把阴阳交替看作宇宙的根本规律。《周易》又用数量来解释宇宙的生成，它把阴阳与数之奇偶联系起来。《易·系辞下》曰：“阳卦奇，阴卦耦。④”阳是奇数，用相连的划“—”(阳爻)表示；阴是偶数，以相分的划“--”(阴爻)表示。这种标记阴阳奇偶的横划，称之为“爻”；每三爻相配合而成“卦”，计有以下八种：

☰ ☷ ☳ ☵ ☶ ☴ ☲ ☱

乾 坤 震 坎 艮 巽 离 兑

故名曰“八卦”。《周易》把它们作为天、地、雷、风、水、火、

---

① “太极”的解释历代各说不一。北宋邵雍认为“心为太极”(《心学》)；南宋朱熹认为“总天地万物之‘理’，便是太极”(《朱子语类》卷九四)；北宋张载则借用“太极”一词来说明“气”。如说“一物两体，气也”(《正蒙·参两》)，“一物而两体，其太极之谓与?”(《正蒙·大易》)。明代王廷相也把“太极”看作“天地未判之前，太始浑沌清虚之气是也。”(《太极辩》)。

② “两仪”，又指天地。孔颖达疏：“不言天地而言两仪者，下与四象相对，故曰两仪，谓两体仪容也。”

③ “四象”，其说不一。有解释为春夏秋冬“四时”；或谓水、火、木、金，布于四方。

④ “耦”，通“偶”。成对，配偶；又与“奇”相对，表偶数。

次序	卦形	卦名	次序	卦形	卦名	次序	卦形	卦名	次序	卦形	卦名
1	䷀	乾	17	䷐	随	33	䷠	遯	49	䷰	革
2	䷁	坤	18	䷑	蛊	34	䷡	大壮	50	䷱	鼎
3	䷂	屯	19	䷒	临	35	䷢	晋	51	䷲	震
4	䷃	蒙	20	䷓	观	36	䷣	明夷	52	䷳	艮
5	䷄	需	21	䷔	噬嗑	37	䷤	家人	53	䷴	渐
6	䷅	讼	22	䷕	贲	38	䷥	睽	54	䷵	归妹
7	䷆	师	23	䷖	剥	39	䷦	蹇	55	䷶	丰
8	䷇	比	24	䷗	復	40	䷧	解	56	䷷	旅
9	䷈	小畜	25	䷘	无妄	41	䷨	损	57	䷸	巽
10	䷉	履	26	䷙	大畜	42	䷩	益	58	䷹	兑
11	䷊	泰	27	䷚	颐	43	䷪	夬	59	䷺	涣
12	䷋	否	28	䷛	大过	44	䷫	姤	60	䷻	节
13	䷌	同人	29	䷜	坎	45	䷬	萃	61	䷼	中孚
14	䷍	大有	30	䷝	离	46	䷭	升	62	䷽	小过
15	䷎	谦	31	䷞	咸	47	䷮	困	63	䷾	既济
16	䷏	豫	32	䷟	恒	48	䷯	井	64	䷿	未济

山、泽等八种自然物象的象征。）又把八卦各取两个相叠，形成六十四种变化，叫做“六十四卦”，如䷀乾、䷁坤、䷂屯、䷃蒙、……等等。①《周易》就是用这六十四卦来说明天地万物的现象。每卦分六爻，第一爻为初爻，第二到五爻为中爻，第六爻为上爻。初爻描绘事物的产生与开始；中爻是事物的发展、变化；上爻是

① 关于“六十四卦”之次序、卦形、卦名等详见附表。

指事物走向消亡与转化为新事物。爻象阴阳的不同排列而构成万事万物，由于阴阳的变化而导致万物变化。因而，认为这每一卦都体现着一种事物的形态(如乾为天卦，体现着事物的发生；坤为地卦，体现着事物的生长；……等等)，由此可以推知事物之未有，断定吉凶，这就是《周易》之用卦爻于占卜的根据。

《周易》是用"数"来占的一种占筮之术。[1]其筮法记载于《易·系辞上》："大衍之数五十，其用四十有九。分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时；归奇于扐以象闰，五岁再闰，故再扐而后挂。天一、地二、天三、地四、天五、地六、天七、地八、天九、地十。天数五，地数五，五位相得而各有合。天数二十有五，地数三十，凡天地之数五十有五，此所以成变化而行鬼神也。乾之策二百一十有六，坤之策百四十有四，凡三百有六十。当万物之数也。是故四营而成《易》，十有八变而成卦，八卦而小成。引而伸之，触类而长之，天下之能事毕矣。"

这段关于上古揲蓍[2]算卦的记述，文字简略隐晦，后人难以理会。卜筮之法，因时演变，随地差殊。筮法之发展，当由简易而繁难。《周易》最古之筮法无可考，但东周之筮法尚可略知。东周之筮法历代儒生相继研讨，其成卦之法似已定案，其解释大意如下：[3]

筮人以椟(木匣)盛蓍草五十策("大衍之数五十")；筮时取掉一策，以象征"太极"，只用四十九策("其用四十有九")。其推演过程分为三"变"(故曰"三变而成爻")。第一变，将四十九策任意分为两部分，则一部分是奇数象征阳，另一部分是偶数象征阴；阴、阳为"两仪"("分而为二以象两")。从某一部分中取出一策而

---

① 《周易》用数来说明宇宙的生成，因而又认为根据数，能够预知天地万物的变化，于是定占筮之法。

② 蓍是筮的工具。《说文》："䈂，《易》卦用蓍也。从竹，从𢀚。𢀚，古文巫字。"又说："蓍，蒿属，生十岁百茎，《易》以为数；天子蓍九尺，诸侯七尺，大夫五尺，士三尺，从艸，耆声。"盖古之筮用竹，巫掌之，故筮从竹、从巫。

③ 见高亨：《周易古经今注》，第七篇，周易筮法新考。

悬挂一旁，这样构成三部分以象征“三才”①（“挂一以象三”）。将挂余之策按每四策一组来抽取，象征着“四时”②（“揲③之以四以象四时”），抽到最后，或余一策，或余二策，或余三策，或余四策，把它夹在小指间以象征闰（“归奇于扐④以象闰”）。然后将另一部分按同样方法“揲之以四”，所余之策也夹在指间而挂之，以象征五年设置两闰（“五岁再闰，故再扐而后挂”）。如此为一“变”。取出之策数为九或五，而所余之策为四十策或四十四策。第二变，将余策按第一变同样方法“揲之以四”，取出策数为八或四，而所余之策数为三十二，或三十六，或四十。第三变，再将二变所余之策，按同样方法揲取，取出策数亦为八或四，而所余之策有四种结果：

余二十四策：四的六倍，老阴，宜变的阴爻；

余二十八策：四的七倍，少阳，不变的阳爻；

余三十二策：四的八倍，少阴，不变的阴爻；

余三十六策：四的九倍，老阳，宜变的阳爻。

至此就决定了第一爻。阳爻画“—”，如系老阳，在画旁记“九”字，少阳则记“七”字；阴爻画“--”，如系老阴，在画旁记“六”字，少阴则记“八”字。“九”、“七”奇数为阳，“八”、“六”偶数为阴，这四数叫做四营；《易》以四营而成卦，又以四营而变卦⑤，故称“四营而成《易》”。第一爻称为“初爻”。反复初爻的演法，可得二、三、四、五、上（第六）爻⑥，六爻俱得而成卦；每卦六爻，每爻三变，所以“十有八变而成卦”。

---

① “三才”，亦作“三材”，指天、地、人。《易·系辞下》：“有天道焉，有人道焉，有地道焉，兼三才而两之。”

② “四时”，指春、夏、秋、冬四季。《礼记》：“天有四时，春、秋、冬、夏”。

③ “揲”，用手抽点成批或成束物品的数目。孔颖达疏：“分揲其蓍，皆以四四为数，以象四时。”

④ “扐”，手指之间。古代筮法以所数蓍草的零余夹在手指间，故亦指奇零之数，而字变作“仂”。

⑤ “变卦法”见高亨《周易筮法新考》，与“蓍卦发微”题关系不大，故略而不述。

⑥ 由爻成卦，是从下往上画，初爻在下，第六爻在最上，故称上爻。

《周易》古经是因古人迷信而产生的一部筮书。筮就是算卦。筮法自然是一种骗人的把戏。自汉代以后，对《周易》作注释的有两千多家，其中很多都是关于占筮部分的注释。而后世这些经学家和占星术士们，以更加玄奥、神秘的词语，使之带上更为浓厚的迷信色彩。

二

秦九韶的"蓍卦发微"解释《周易》的筮法与历代经学家的注疏不同，兹照录如下：

"凡揲蓍求一爻之数，欲得一、二、三、四。出于无为，必令揲者不得知。故以四十九蓍，分之为二。只用左手之数，假令左手分得三十三，自一一揲之，必奇一，故不繁揲，乃径挂一。故《易》曰：'分而为二以象两，挂一以象三。'次后，又令筮人以二二揲之，其三十三，亦奇一，故归奇于扐。又令之以三三揲之，其三十三，必奇三，故又归奇于扐。又令之以四四揲之，又奇一，亦归奇于扐。与前挂一，并三度揲，通有四扐，乃得一、一、三、一。其挂一者，乘'用数图'左上用数一十二；其二揲扐一者，乘左副用数二十四；其三揲扐三者，乘左次用数四，得一十二；其四揲扐一者[1]，乘左下用数九。挂一，得一十二；扐一，得二十四；扐三，得一十二；又扐一，得九，並为总数。并此四总得五十七。不问所握几何，乃满衍母一十二去之，得不满者九，（原注：或是知其所握三十三[2]，亦满衍母去之，亦只数九数），以为实。用三才衍法约之，得三。乃画少阳单爻。（或不满得八、得七为实，皆命为三——原注）他皆仿此。术意：谓揲二、揲三、揲四者，凡三度，复以三十三从头数揲之，故曰'三变而成爻'；既卦有六爻，必一十八变，故曰'十有八变而成卦'。"

---

① 传本为"其四揲一者"，缺"扐"字，今依上文校改。

② 传本误为"三十七"，今校改。

秦九韶对揲蓍算卦之法的记述详尽而清楚，但与历代儒士相传之解释大相径庭。秦氏大概根据一张（来历不明的）“阴阳象数图”①：

阴阳象数图	水	火	木	金	始此四数以揲
	丨	丨丨	丨丨丨	丨丨丨丨	
	老阳	少阴	少阳	老阴	终此四者为爻

将《周易》的“揲之以四”，释为（或者说“改为”）“揲一、揲二、揲三、揲四”；而因为“自一一揲之，必奇一，故不繁揲”，演变为“挂一”，于是，《周易》所谓的“三变”被释为“揲二、揲三、揲四者，凡三度”，并且是“从头数揲之”。这样以来，秦九韶所述的筮法事实上已成为一次同余问题的数学模型。即，假令筮人左手分得蓍草N（<49）策，一一揲之，必余一；设二二揲之，余r_2；三三揲之，余r_3；四四揲之，余r_4。记$a_i=i(i=1,2,3,4)$。用“大衍术”，求一次同余式组

$$x\equiv r_i(\mathrm{mod}\,a_i),\quad (i=1,2,3,4)$$

的最小正整数解x_0，则“用三才衍法”②除之，便得一爻之象数为：

$$M=\left[\frac{x_0+2}{3}\right]^{③},$$

因为$0<x_0\leqslant 12$，故M仅可能为1,2,3,4四数之一。即象数有四种结果：④

象数得一，为老阳，画重爻；

象数得二，为少阴，画拆爻；

象数得三，为少阳，画单爻；

象数得四，为老阴，画交爻。

故曰“终此四者为爻”。

---

① 原书此图为竖式。

② “蓍卦发微”题之“本题术”有云：“《易》以三才为衍法”，但未详出处。

③ 记号[ ]表示整数部分。如“本题术”云：“如实有余，或一或二，皆命作一，同为象数”，故表为上述现代数学记号。

④ 见“蓍卦发微”之“本题术”。

秦九韶对《周易》所谓“大衍之数五十，其用四十有九”的解释，也与众不同。按秦氏之意，所谓“大衍之数”，即是诸“衍数”之和；而所谓“其用四十有九”，也就是指各“用数”之和为四十九。它们的由来与“大衍总数术”的推算相联系。

秦九韶指出，若按“大衍总数术”解筮法所归结的一次同余问题：

$$x \equiv r_i (\mathrm{mod}\, i), \quad (i=1,2,3,4)。$$

则依次推出

元数：1，2，3，4；

定数：1，1，3，4；

衍数：12，12，4，3；

奇数：1，1，1，3；

乘率：1，1，1，3；

用数：12，12，4，9。

于是得各用数之和为：12＋12＋4＋9＝37。秦氏曰：“就其三十七泛为用数；但三十七，无意义，兼蓍少太露，是以用四十有九。”意思是说，依术推算“用数”应为37①；但是，作为筮法用蓍之策数，37是不适宜的。因为，第一，数37没有任何“神圣”的意义；第二，将37策分之为二进行揲蓍，未免因策数太少让人容易识破“天机”。于是，须对用数作必要调整。为此，秦氏将定数复原为元数来计算，从而推得

元数：1，2，3，4；

衍数：24，12，8，6；

用数：12，24，4，9。

诸衍数之和为：

$$24+12+8+6=50,$$

故曰“大衍之数五十”；而各用数之和为：

---

① 它是适合“用数”意义的最简单的数。

$$12+24+4+9=49,$$

故曰“其用四十有九”。

秦九韶还进一步解释“衍数”与“用数”的意义，以及二者间的关系。他说：“算理不可以五十为用。盖分之为二，则左右手之数奇偶不同。见阴阳之伏数，必须求用数。先名此曰‘衍数’，以为限率。”即言，按《周易》之理，筮人左右两手所分得之策应一奇一偶，以象征阴阳；若以五十策分之为二，则不能合此要求，故不可以五十为“用数”，称之为“衍数”，以表示筮法用蓍之“限率”（策数之上界）而已。至于选用“四十九”为用数的理由，秦氏曰：“假令用蓍四十九，信手分之为二，则左手奇，右手必偶；左手偶，右手必奇。欲使蓍数近大衍五十，非四十九或五十一不可。二数信意分之，必有一奇一偶。故所以用四十九，取七七数始者。”说得明白，四十九与“大衍之数五十”相近，分之为二必一奇一偶，而且恰为“七七”①之数，取之为用数自然是适宜的。

这样，秦九韶从“大衍总数术”之算理与《周易》之哲理两方面的结合上，相当“完满”地解释了筮法和“大衍之数五十，其用四十有九”的来由。

三

秦九韶的“蓍卦发微”是否在于宣扬数字神秘主义，应当具体分析。

《周易》为儒学“六经”②之冠，汉代以后注《易》之风盛行，世代相传不绝。魏王弼、晋韩康伯之“注”，唐孔颖达之“疏”，颇有影响。到了宋代道学兴起，此风尤甚。宋儒读《周易》有心得而著

---

① “七七”，佛经谓人生有六道流转，在人死此生彼之间，有“中阴身”，如童子形。寻求生缘，以七日为一期，若七日终，不得生缘，则更续七日，至第七个七日终，必生一处。在此期间举行超度祭奠，形成习俗，故名。

② 孔子定儒学“六经”为《易》、《诗》、《书》、《礼》、《乐》、《春秋》。

书立说者很多，主要是关于占筮部分的注释。如北宋邵雍（公元1011—1077年），根据《易传》关于八卦形成的解释，参杂道教思想，虚构一宇宙构造图式和学说体系，成为他的“象数之学”。而南宋道学达到了顶峰，其集大成者朱熹（公元1130—1200年），认为“理”是世界的本原，建立一个完整的客观唯心主义的理学体系。其所撰《周易本义》是从元末到清末五百余年中五经读本之一，卷首有他集录的九个“易图”，其中“河图图”、“洛书图”、“伏羲八卦次序图”和“伏羲六十四卦次序图”等四个图代表宋代道学家的象数学。尽管由于宋代统治集团内部的倾轧，道学有时得到提倡，有时遭到禁止①，但是它无疑对于宋代的学术产生极大的影响。

秦九韶生活在道学盛行而又斗争激烈的年代。他既“性极机巧，星象、音律、算术，以至营造等事无不精究”②，自然对《周易》和道学家的“象数之学”不可不广泛涉猎。在这样的历史背景下，秦九韶的《数书九章》中摘引了某些道学家的词语是可以理解的；这可以说是一种“时代的印记”，并不能简单地视为作者本人的哲学观点。

详究秦九韶的有关论述，与道学家并不相同。他在序言中写道：“周教六艺，数实成之。学士大夫，所从来尚矣。其用本太虚生一，而周流无穷，大则可以通神明，顺性命，小则可以经世务，类万物，讵容以浅近窥哉。”这很明显是援引了当时流行的道学家的思想。但是，他又说：“所谓通神明，顺性命，固肤末于见，若其小者，窃尝设为问答，以拟于用。”可见他对于道学家的玄奥之说并不十分相信，而其对数学的倚重是在于经世致用。这实际上是对象数神秘主义的一种否定③。

《易经》本是筮书。每卦有它的卦象，每爻有它的爻象和爻数。卦爻的象数是占筮的根据，所以讲《易经》的筮法是离不开象数

---

① 《宋史·道学列传》：“道学盛于宋，宋弗究于用，甚至有厉禁焉。”

② 引自周密：《癸辛杂识续集下》。

③ 《中国科学技术史稿》一书对此有相同看法，见该书下册第38面。

的。秦九韶的“蓍卦发微”，自然不可避免地涉及“阴阳象数图”之类，而且《数书九章序》中确实使用了某些道学家的语言[①]。但是，他对《周易》筮法的具体解释，却与道学家及占星术士者流截然不同。历代注释《周易》者，解释“大衍之数五十，其用四十有九”，皆用天地、鬼神之类的隐晦之词和“凡有皆从无而来”的说教，来宣扬“天人感应”和“道本虚无”的宗教神秘主义思想。魏人王弼曰：“演天地之数所赖者，五十也。其用四十有九，则其一不用也。不用而用，以之通非数而数，以之成斯《易》之太极也。夫无不可以无明，必因于有。故常于有物之极而必明其所由之宗也。”后世注释家承王弼之旨，又推衍发挥，使之玄而又玄。[②]秦九韶独树一帜，用“大衍总数术”的推算来解释“大衍之数五十，其用四十有九”。依秦氏说，“大衍之数”乃各“衍数”之和，他表示揲蓍算卦时，所用策数之上限；而“其用四十有九”，是指各“用数”之和为四十九。虽然，他也有“取七七数始者”之说，但他直言不讳，说明“就其三十七为泛用数；但三十七，无意义，兼蓍少太露，是以用四十有九”。承认这些数字是为附会天命、骗人眼目而编造出来的。“蓍卦发微”所描述的筮法，几乎等同于一个数学游戏，哪里还有什么“神圣”的意义！所以，与其说“蓍卦发微”，是宣扬数字神秘主义，还不如说它是对占筮“神圣性”的“亵渎”。

秦九韶，一代名流，精通星象之术，不可能不知道历代儒生相传对《周易》筮法的解释。何以他要别出心裁，作如是之“蓍卦发微”？其说根据何在，不得而知，很可能是他自己杜撰出来的。[③]

---

① 如其《序》有云：“爰自河图、洛书，闿发秘奥，八卦、九畴，错综精微，极而至于大衍、皇极之用，而人事之变无不该，鬼神之情莫能隐矣。圣人神之，言而遗其粗，常人昧之，由而莫之觉。要其归，则数与道非二本也。”

② 《周易正义》列举注释者多家。如顾懽云：“立此五十数以数神。神虽非数，因数而显，故虚其一数，以明不可言之义。只如此言，别无所以，自然而有此五十也，今依用之。”又如郑康成云：“天地之数五十有五，以五行气通。凡五行，减五，大衍；又减一，四十九也。”如此等等。

③ 秦氏所述筮法，别无记载。其算理精深，远古似不可能有此种算法。

卜筮之术相传为圣人所作①，秦氏若真敢妄自篡改，可见他决不是道学(或道家)的虔诚的信徒。那末，秦九韶撰写"蓍卦发微"目的何在？是否为了"窜入于易以眩众"？这似乎是一个更值得探讨的问题。

其实，秦九韶在《数书九章序》中，开宗明义地写道："圣有'大衍'，微寓于《易》。奇余取策，群数皆捐。衍而究之，探隐知原。"是说圣贤有"大衍之术"，其精微处寄托于《周易》之中。而所谓"蓍卦发微"，正是要通过对远古筮法的推演来阐发大衍术之精微。列之于《数书九章》"大衍类"之首，不言而喻，在于表明大衍之术起源于占筮之法。固然，说远古已用大衍术来算卦是不足为信的，但如果秦九韶说古老的筮法包含着大衍术的远源，不是没有其道理的。

首先，秦九韶的这种说法可能出自他的"数术"观念。《数书九章序》云："今数术之书，尚三十余家。天象历度，谓之'缀术'；太乙壬甲，谓之'三式'，皆曰'内算'，言其秘也。《九章》所载，即周官'九数'，系于方圆者，为"叀术'，皆曰'外算'，对内而言也。其用相通，不可岐二。"秦氏之书名《数书九章》，这里所说之"数"，并非专指"算术"(即今之"数学")，而是泛指"数术"。②其内容不仅包括算术，而且还涉及星象、占卜、天文历法中凡用"算"之属。通常用于"经世务，类万物"的"算术"与"通神明，顺性命"的星占、历术本是一家，同归于"算"，只有内、外(神秘与公开)之别。此说并非全无道理。中国古代的天文历算与星象占卜有着不解之缘。宗教和占星术是促进中国古代天文学发展的因素（或者更恰当的说法，中国古代天文学是在《周易》阴阳八卦说的影响之下发展起来的)③；而中国古代的算术一开始就和历法结合在

① 相传八卦为伏羲所作，又说为周公姬旦所作。

② 秦九韶的书在南宋末称《数术大略》或《数学大略》，到明代称《数学九章》或《数书九章》。手稿早佚，原名难考。现通行宜稼堂本，依它称为《数书九章》。

③ 参见陈遵妫：《中国天文学史》，第二编，第一章，中国古代天文学与占筮。

一起。周代的“畴人”，既懂得历法，又精通算术[①]。殷商时代的巫人，他手中竹策既是算卦的工具，也是作历算的“筹”。而“巫术”，是原始社会的信仰和后世天文、历算、宗教的起源。因此，就数学的起源和早期的发展来说，秦九韶的“数术观”，并不是无稽之谈。

至于说“大衍术”是否可以说“源于《周易》之筮法”，我以为如果追溯它的远源，秦九韶的“微寓于《易》”说也还是有道理的。大衍术本质上是处理一次同余问题，其精微处正在于“同余”概念。《周易》以阴阳奇偶说为本；而奇与偶正是最简单而原始的“同余类”。二二数之，适尽为“偶”，有余为“奇”；古语中用“奇”表余数（“奇零”），大概与此有关。而《周易》筮法其演变之要在于“揲蓍”。“揲”，即按每组一定数目来点数物品；“揲之以四”，即四四数之，是模数为4的同余类。因此，揲蓍筮法蕴涵着同余概念的发展。在这个意义上说大衍术“微寓于《易》”，是一种很深刻的见解。

大衍术源于筮法之说可能在南宋时代流行。稍晚于秦氏的杨辉，其《续古摘奇算法》（公元1275年）载“孙子”问，解题云：“俗名秦王暗点兵，犹覆射之术”。按“覆射”，又称“射覆”，古代的一种游戏，猜度预为隐藏之物。其假托的方法之一是卜筮。《汉书·东方朔传》：“上尝使诸数家射覆”。颜师古注：“数家，术数之家也。于覆器之下而置诸物，令暗射之，故云射覆。”杨辉以“覆射”释“秦王暗点兵”（即大衍术）；而“覆射”为汉已有之的一种与卜筮有关的游戏，这就意味着大衍术与古老的筮法有关。

即使从现代的眼光来看，“蓍卦发微”也并非毫无意义，它不仅以极简单的数字，给出大衍术计算的一个范例[②]，而且它还给

---

① 周人崇尚卜筮之术，而贵族教育定为礼、乐、射、驭、书、数等“六艺”，很可能卜筮之类包含在“数”中。

② 为了说明数学的方法，举例所用的数字往往是愈简单愈清楚，这是编写数书的经验。

人以这样的启示：古老的《易经》可能蕴藏着丰富的、朴素的数学思想。

参 考 文 献

〔1〕《十三经注疏》，中华书局影印。
〔2〕高亨：《周易古经今注》(重订本)，中华书局，1984年。
〔3〕〔宋〕周密：《癸辛杂识续集下》。
〔4〕〔宋〕杨辉：《续古摘奇续集》。
〔5〕钱宝琮：《秦九韶〈数书九章〉研究》，〈宋元数学史论文集〉，科学出版社，1966年。
〔6〕钱宝琮：《宋元时期数学与道学的关系》，同上。
〔7〕陈遵妫：《中国天文学史》，上海人民出版社，1980年。

“大衍求一术”溯源

李 继 闵

“大衍求一术”的起源，从来就是中外数学史家最有兴趣的论题。自从清代学者张敦仁[1]提出“求一之术出于《孙子算经》物不知数之问”以来，此说流行于一般数学史著作长达百余年之久。①而李约瑟等西方学者则根据“大衍”之名得自《易经》，推测这一算法与卜筮古法有关。②近二十年来，许多学者认为求一术的产生“是和历算上推算‘上元积年’有着密切联系。”③钱宝琮更有推断“大约在三世纪中历法工作者开始应用剩余定理计算上元积年。”[6]新近又有专文[7]研究汉历上元积年的计算，从而提出“我国古代关于一次同余论的研究，肇源于汉代历算家上元积年的计算”。各种见解的相继发表把问题的讨论引向深入。

诚然，求一术之在中算史上源远流长，无疑有着独特的理论根源和深厚的实践基础。追溯“大衍求一术”的本源，一方面需要全面考察历史上提出一次同余问题的实际背景，另一方面应当仔细寻找这一算法在中算理论内部的“生长点”。只有把实践之“源”与理论之“本”联系起来，作出符合历史的分析，才能对求一术的产生与发展，获得比较全面、清晰的认识。

一、求一术的理论之“本”

“大衍求一术”是古代中算家由已知奇数(g)和定数(a)来推求

---

① 包括李俨、钱宝琮的早期著作(文献[2]、[3])在内皆曾沿袭此说。

② 见文献[4]第269—270页正文与脚注。

③ 见李俨、杜石然的著作(文献[5])。

乘率 (k) 的程序化算法，是中算处理一次同余问题最基本的数学工具。这一算法用现代数学术语来说，即由已知互质二正整数a，g($g<a$)，求正整数k，使得

$$kg\equiv 1 \pmod{a}.$$

其演算步骤最早的完整记载见于秦九韶的《数书九章》，兹照录如下。

"大衍求一术云：置奇右上，定居右下。立天元一于左上。先以右上除右下，所得商数与左上一相生(乘)，入左下。然后乃以右行上下，以少除多，递互除之。所得商数，随即递互累乘，归左行上下。须使右上末后奇一而止。乃验左上所得，以为乘率。或奇数已见单一者，便为乘率。"

依术推演，即是下列筹式变换①：

天元 1	奇数 g
	定数 a

$\frac{a}{g}=q_1$……余 r_1；令 $c_1=q_1\times 1=q_1$ →

1	g
c_1	r_1

$\frac{g}{r_1}=q_2$……余 r_2；令 $c_2=q_2\times c_1+1$ →

(1) 置奇右上，定居右下。立天元一于左上。

(2) 先以右上除右下，所得商数与左上一相生，入左下。

c_2	r_2
c_1	r_1

$\frac{r_1}{r_2}=q_3$……余 r_3；令 $c_3=q_3\times c_2+c_1$ →

c_2	r_2
c_3	r_3

→……→

(3) 然后乃以右行上下，以少除多，递互除之。所得商数，随即递互累乘，归左行上下。

(4) ……

① 《数书九章》"蓍卦发微"演草附图给出求一术的筹算程序演草图，其辗转相除所得之商q_k置于右行之最上、最下；而逐次换算所得之 c_i ($i=1, 2, \cdots, n-1$) 称为"归数"。

c_{m-2}	r_{m-2}	$\frac{r_{m-2}}{r_{m-1}} = q_m \cdots\cdots$余 r_m	c_m	$r_m = 1$
c_{m-1}	r_{m-1}	令 $c_m = q_m \times c_{m-1} + c_{m-2}$ →	c_{m-1}	r_{m-1}

(m) ……　　　　($m+1$)须使右上末后奇一而止。

如此反复进行相同的演算$m=2s$次，使右上所得余数$r_m=1$①为止，于是左上所得c_m即为乘率，$k=c_m$；而当$g=1$时，有$k=1$。

求一术算法神奇而巧妙，此算法从何得来？中算史的研究者们，早已注意到古老的求一术、调日法与近代的一次不定方程解法、连分数算法等，在原理上彼此相通。然而，对于它们之间的历史渊源还未曾有过认真的清理。沈康身[8]认为这些算法皆源于"更相减损"术；而严敦杰更深刻地指出："中国古代数学家研究近似值的成就，首先是'求一术'的发明。"[22]求一术发端于分数近似法，而这种分数近似法又基于"更相减损"术，这不仅是一种入情入理的推测，而且最近的研究[9,10]进一步勾画出这一算法发展线索的轮廓。它表明求一术很可能是西汉《三统历》中的一种分数近似法——"通其率"术的衍生物。

关于"通其率"术已有专文详加考释[10]，在此仅略述其大要。"通其率"见载于《汉书·律历志》"五步"，它原本是约简比率或分数的一种算法。所谓"其率"②，质言之即是由带余除法所得之(整)商；"通"，即指类似于"通分纳子"的换算。总而言之，所谓"通其率"，即是对辗转相除所得一系列（整）商q_i，施行类似于"通分纳子"的程序化演算。例如约简分数$\frac{b}{a}$，其步骤大致如下：

---

① 这一要求总是可以办得到的。设若$r_{2s-1}=1$，则令$q^*_{2s}=r_{2s-2}-1$，于是得$r_{2s}=1$，取$r_m=r_{2s}=1$，便合于要求。

② 关于"其率"意义的详细解释见文献[8]。

$e_i\downarrow$		a	b	q_1	$c_i\downarrow$
令$e_1=1$		$-)q_1b$	$-)q_2r_1$		令$c_1=q_1$
$e_2=q_2$	q_2	r_1	r_2	q_3	$c_2=q_2q_1+1$
$e_3=q_3e_2+e_1$		$-)q_3r_2$	$-)q_4r_3$		$c_3=q_3c_2+c_1$
$e_4=q_4e_3+e_2$	q_4	r_3	r_4	q_5	$c_4=q_4c_3+c_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
			r_{n-3}	q_{n-2}	
$e_{n-1}=q_{n-1}e_{n-2}+e_{n-3}$			$-)q_{n-1}r_{n-2}$		$c_{n-1}=q_{n-1}c_{n-2}+c_{n-3}$
	q_{n-1}	r_{n-2}	r_{n-1}	q_n	
$e_n=q_ne_{n-1}+e_{n-2}$					$c_n=q_nc_{n-1}+c_{n-2}$
		$-)q_nr_{n-1}$			
		0			

所得$\frac{e_n}{c_n}$即是$\frac{b}{a}$的既约分数。这种算法以其率(q_i)的换算(即依次计算e_i，c_i)来代替原始"约分术"的"等除法实"①，是一个很有意义的改进。这不仅使得求既约分数的计算在某些场合得到简化②，而且自然地给出$\frac{b}{a}$的渐近分数序列

$$\frac{e_1}{c_1},\ \frac{e_2}{c_2},\ \cdots\cdots,\ \frac{e_n}{c_n},$$

从而使"通其率"术成为中国古代分数近似法的重要工具，在古代天文历法数据的处理中得到广泛的应用③。

从"通其率"算法导致"求一术"规律的发现，是由于渐近分数列性质的研究。

正如严敦杰[11]所指出："中国古历法所有天文数据基本上都用

① 《九章算术》所载"约分术"，即先求等数（最大公约数），再以等数分别去除分子、分母。

② 在等数较大的情形，通其率的"互乘累加"比约分术的"以等数除之"要省算。

③ 参见文献[10]。

分数来表示。分数运算成为古历法中一很大项目。"而天文数据一般都是实测结果的近似值，因此分数近似法必然由于广泛的应用而得到深入的研究。古老的"其率术"中便已明确提出不足近似值(贱率)与过剩近似值(贵率)的概念，表明比较近似值的大小在中算史上由来已久。[①]《九章算术》中的"课分术"[②]便是比较邻近分数大小的专门法则。[③]天算家使用通其率术，首先需要考察渐近分数列$\frac{e_1}{c_1}$，$\frac{e_2}{c_2}$，……，$\frac{e_n}{c_n}$的增减性状与误差程度；而用课分术求相邻二渐近分数的"相多"，就自然会引导出求一术的发现。例如，《三统历》中关于木星日行度的推算[④]，由通其率术获得一组渐近值：

$$\frac{1}{1},\ \frac{10}{11},\ \frac{11}{12},\ \frac{131}{143},\ \frac{1452}{1585},\ \frac{1583}{1728}。$$

对相邻二数施以"课分术"之"母互乘子，以少减多"，便可发现"余实"皆为"一"：

$$1\times11-1\times10=1;\qquad 11\times11-10\times12=1;$$

$$11\times143-12\times131=1;\qquad 143\times1452-131\times1585=1;$$

$$1452\times1728-1585\times1583=1。$$

事实上，由$c_1=q_1$，$c_2=q_2q_1+1$，$e_1=1$，$e_2=q_2$，便有$e_1c_2-c_1e_2=(q_2q_1+1)-q_2q_1=1$。而由

$$e_{t-1}c_t-c_{t-1}e_t=e_{t-1}(q_tc_{t-1}+c_{t-2})+c_{t-1}(q_te_{t-1}+e_{t-2})$$
$$=-(e_{t-2}c_{t-1}-c_{t-2}e_{t-1}),$$

按归纳法可知

$c_{t-1}e_t-e_{t-1}c_t=(-1)^{t+1}$，$(t=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$。此即相邻二渐近分数$\frac{e_t}{c_t}$与$\frac{e_{t-1}}{c_{t-1}}$之差("相多")为$\frac{1}{c_{t-1}\times c_t}$。这个规律正是

① 参见文献[9]。

② 课分术曰："母互乘子，以少减多，余为实，母相乘为法，实如法而一，即相多也。"

③ "课"，考核、检验之意；"课分"，即比较分数之大小。它与"减分"不同之处在于两分数值相近，预先不易判断孰大孰小。

④ 参见文献[10]。

中算家得以建立"求一术"的关键。如果说古希腊数学理论的逻辑特征是演绎法，那末中算家的算法理论则以归纳法为其擅长。因而，古代的天算家从反复千百次这样的"课分"之中发现这一规律从而创造了"求一术"，便不是什么神奇的事了。①

对照两种算法的结构，"求一术"计算"归数"与"通其率"中c_t的演算程序完全吻合。在a与g互素的条件下，若$a=c_{2s+1}$，$g=e_{2s+1}$，于是由相邻二渐近分数之差的性质知

$$c_{2s}g-e_{2s}a=c_{2s}e_{2s+1}-e_{2s}c_{2s+1}=(-1)^{2s+2}=1,$$

即

$$c_{2s}g\equiv1(\mathrm{mod}\ a),$$

这就是求一术能推算出乘率$k=c_{2s}$的道理。

从演算程序来看，从"通其率"到"求一术"只有以下几点细节的变化：

(1) 要求a与g互素；

(2) 略去$e_t(t=1, 2, \cdots, n)$的计算；

(3) 计算c_t从"令$c_0=1$"("立天元一")开始；

(4) 要求$r_{2s}=1$("须使右上末后奇一而止")。

其中(1)的要求是由a与g在演算中扮演的角色决定的。设若$a=c_{m+1}d$，$g=e_{m+1}d$，则有②

$$c_mg-e_ma=(c_me_{m+1}-e_mc_{m+1})=d,$$

故必须在a与g互素(即$d=1$)时，才有

$$c_mg-e_ma=1\quad 或\quad c_mg\equiv1(\mathrm{mod}\ a).$$

而在a与g不互素($d\neq1$)的情形，要用通其率算法解一次不定方程问题

$$gx-ay=R$$

或等价的一次同余问题

---

① 这一规律很可能起初被经常用于检验渐近分数计算的正确与否，后来才被应用在一次同余问题的求解上。

② 注意，这里$m=2s$；$n=m+1$。

$$gx \equiv R(\mathrm{mod}\ a),$$

必须R为d的倍数。中算家很可能就是通过这一算法的应用直观地认识到一次同余问题有解的条件。①

对于一次同余问题求解，e_i的计算是多余的；但对于不定方程$gx-ay=R$，它有解$x=R'c_m$，$y=R'e_m$，（其中$d=(a,g)$，而$R=dR'$，）故e_i的计算是有意义的，却并非必要的，因为一般说来由公式$y=\frac{gx-R}{a}$来计算，比求e_i的序列简便。因此，作为处理一次不定问题的工具，用"求一术"代替"通其率"的简化是适当的。

就求一术的演算程序来说，"立天元一"是可有可无的，故清代学者黄宗宪《求一术通解》主张删去。我国古代筹算的许多循环递推演算程序的设计中，为了便于布筹定位，计算一列c_i时往往从令$c_0=1$开始，这类似于开方术中的"借一算"。秦九韶"大衍求一术"的立天元一，也是以"一"为程序计算的起点，其作用在于标定筹式左行的位置(否则左行全为零，无从辨认)。古代筹算程序以"一"为计算起点，这大概是"立天元一"的原始意义，后人不明此理，曾引起不少的猜测与争议。②

第(4)点变化反映出中算家已有了构造相邻渐近分数的"中间分数"③的知识。在$r_{2s-1}=1$时，须令$q^*_{2s}=r_{2s-2}-1$，这相当于在分数$\frac{e_{2s-1}}{c_{2s-1}}$与$\frac{e_{2s}}{c_{2s}}=\frac{r_{2s-2}e_{2s-1}+e_{2s-2}}{r_{2s-2}c_{2s-1}+c_{2s-2}}$之间插入中间分数④$\frac{(r_{2s-2}-1)e_{2s-1}+e_{2s-2}}{(r_{2s-2}-1)c_{2s-1}+c_{2s-2}}$。这实际上是"加成法"的应用。它标志着由渐近分数列向"调日法"的迈进。⑤

---

① 文献[7]根据对汉历上元积年计算的分析，推测当时历算家已有判别一次不定方程或一次同余式有无整数解的知识。

② 从清代焦循《天元一释》以至钱宝琮的晚期著述(文献[13]第69页)对此都有讨论。

③ "中间分数"概念的定义见文献[14]。

④ 注意，这里$q_{2s}=r_{2s-1}$，$\frac{e_{2s+1}}{c_{2s+1}}=\frac{g}{a}$。

⑤ 关于调日法的产生，参见文献[15]。

二、求一术的历法之“源”

历元推算是大衍求一术的历法起源。上元积年[①]的推算在我国古代历法的制定中起着重要的作用。从秦以前的古六历直到元代的《授时历》以前，上元积年的计算在我国历法史上经历了漫长的时期。有关古六历历元的资料流传下来的很少。《淮南子·天文训》只记录颛顼历历元之名为甲寅。后来《开元占经》所载古六历的上元积年数字，一般认为是东汉人所追记的。因而，西汉以前历法的上元积年推算已无从详考。

关于汉历上元积年的计算，中外学者都有著述研讨。[②]李文林等考证《三统历》与《古四分历》上元积年的推算，认为它有赖于一次不定方程或一次同余式的求解。“至于说，汉代历算家在推算上元积年时，究竟是解一个一次不定方程，还是解一个一次同余式，以及他们解这些方程时所用的具体方法是什么？这不能凭空臆断。”[7]下文将通过对东汉以前四部历法上元积年推算的考证，探讨由通其率术向求一术演进的历史线索。

《三统历》上元积年的计算

《汉书·律历志》“世经”记载：“汉历太初元年，距上元十四万三千一百二十七岁。前十一月甲子朔旦冬至，岁在星纪婺女六度。”

汉历规定历元起于冬至、朔旦、甲子日夜半。查三统历法，年月日与甲子的最小公倍数(称为“元法”)为4617年。既然测得太初元年前十一月甲子、朔旦、冬至会合，故三统历元到太初元年的积年数N应是4617的整倍数，即

---

① 上元(又称历元)是一部历法所规定的起点，而由上元到所求年累计的年数称为上元积年。

② 新城新藏在[16]中考证三统历上元积年，归结为求解一个较为复杂的不定方程。

$$N = 4617 \times p, \qquad (p\text{为正整数})。$$

“三统”之前，历法使用“岁星纪年”，将周天分为十二次，以彼年岁星所在之处为纪年之标准。①三统历法关于五星推步规定“去日半次”，即以星在日前半次(约15.218756°)处作为观测之起点。由此推之上元之时岁星当在斗十二度，即星纪之初。②又据“五步”记载，岁星日行度为$\frac{145}{1728}$，故N年所行之周天数为

$$4617p \times \frac{145}{1728},$$

其余数应与“星纪婺女六度”相符。③

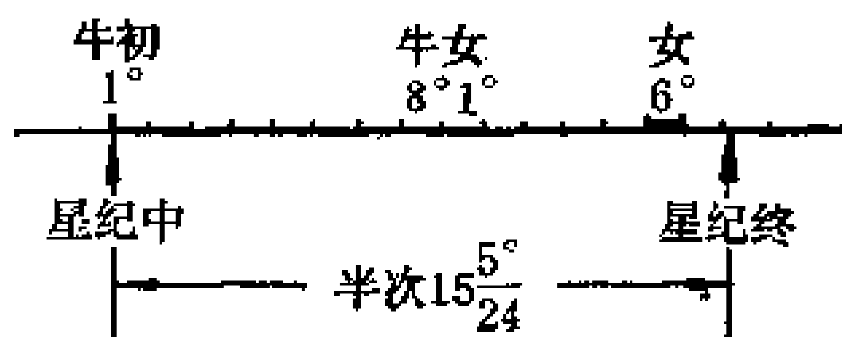
又据《汉书·律历志》关于十二次与二十八宿距度之记载：“星纪，初斗十二度，……终于婺女七度。”推知星纪之次约计30°，婺女六度当在一次之$\frac{28}{30}$至$\frac{29}{30}$之间，④即在周天之$\frac{135}{1728}$至$\frac{139}{1728}$之间。⑤于是三统历上元积年之计算便归结为下述一次剩

① 见附图一：《汉书·律历志》所载十二次与二十八宿。

② 此为岁星纪年之起点，参见《汉书·律历志》“岁术”。

③ 此为文献[7]立论之关键。清代李说[17]亦注意到这一点，并作了详细验算。

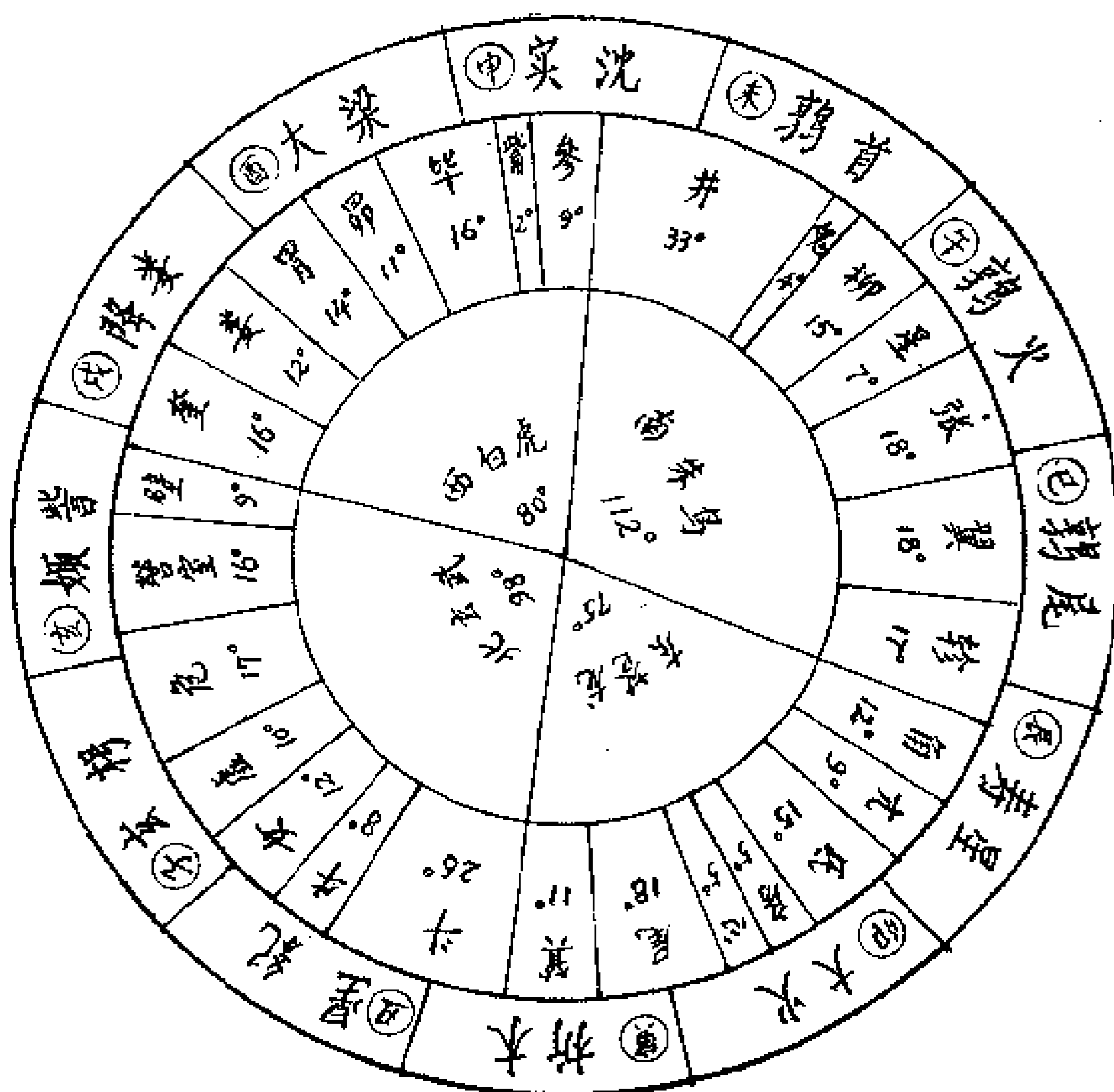
④ 如图：



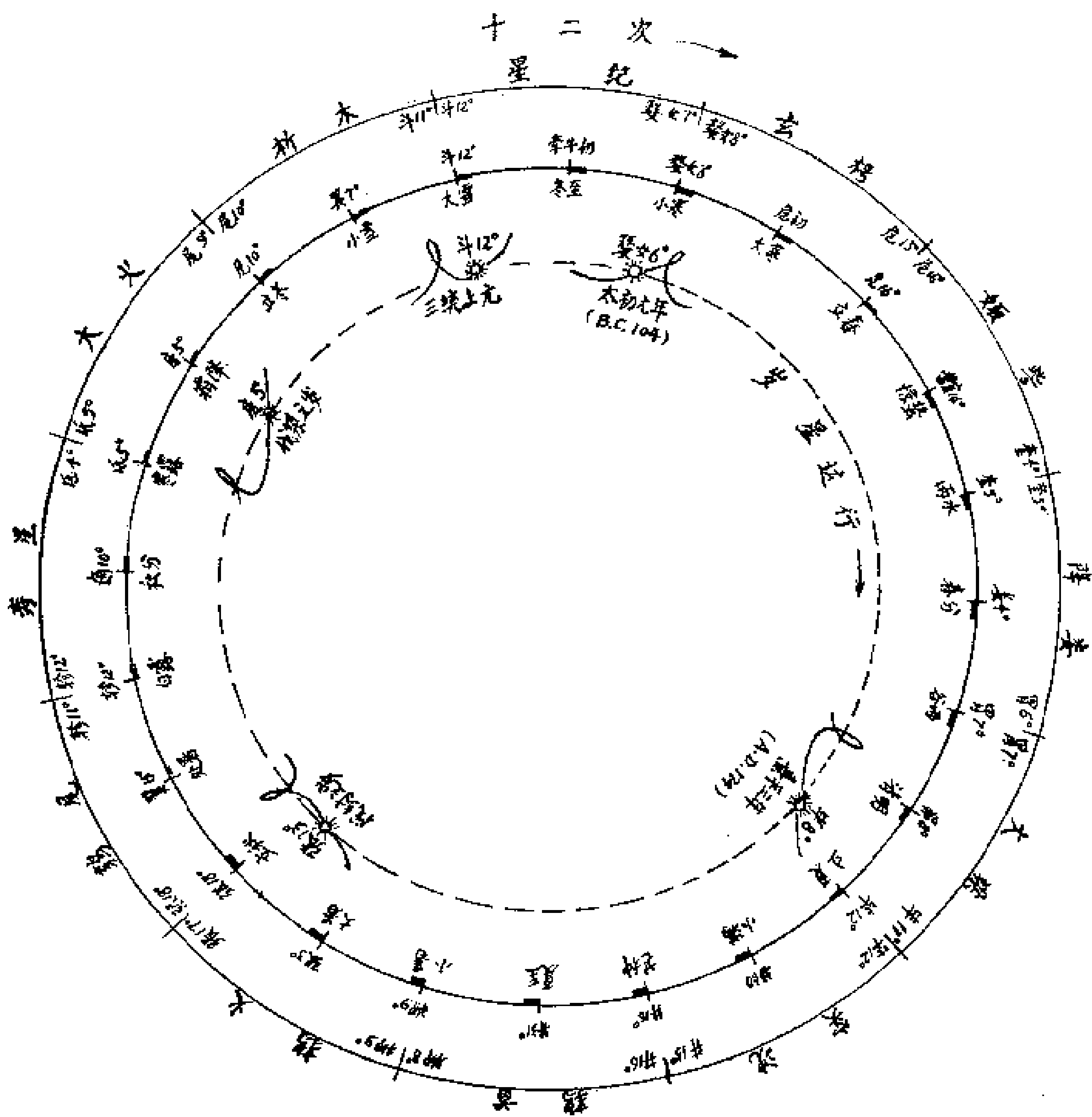
婺女6°距纪年起点(斗12°)为$\left(28\frac{5}{24}\right)^\circ$至$\left(29\frac{5}{24}\right)^\circ$之间，以一次$\left(30\frac{5}{12}\right)^\circ$除之，即为一次之$0.92740 \doteq \frac{27.82}{30}$至$0.96027 \doteq \frac{28.81}{30}$之间。

⑤ $\frac{28}{30} \div 12 \doteq 0.077778 \doteq \frac{134.39986}{1728}$；

$\frac{29}{30} \div 12 \doteq 0.080556 \doteq \frac{139.1999}{1728}$，



附图一 《汉书·律历志》所载十二次与二十八宿



附图二　汉历历元计算中所涉及的岁星运行位置

余问题：

求最小正整数p，使$4617\times145\times p$被1728除得之余数r满足$135\leqslant r\leqslant139$。这个问题若用现代数学的记号表示，即求解一次同式余

$$669465p\equiv r(\text{mod}1728),$$

其中：$135\leqslant r\leqslant139$。

对于如此巨大数字的剩余问题，天算家自然要用他们所熟悉的通其率算法来处理：

$e_i\downarrow$		669465	1728	387	$c_i\downarrow$
$e_1=1$		668736	1458		$c_1=387$
$e_2=2$	2	729	270	2	$c_2=775$
$e_3=3$		540	189		$c_3=1937$
$e_4=7$	1	189	81	2	$c_4=2714$
$e_5=19$		162	81		$c_5=7361$
$e_6=64$	3	27	0		$c_6=24795$

由相邻二渐近分数之"余实"为"一"，知

$$24795\times19-64\times7361=1,$$

用等数(669465，1728)＝27乘之，得

$$669465\times19-1728\times7361=27。$$

故余数r应为27之整倍数，这只有$r=27\times5=135$。于是，用5乘之，得

$$669465\times95-1728\times36805=135。$$

再由$\frac{669465}{1728}=\frac{24795}{64}$，得

$$669465\times64=1728\times24795,$$

故有

$$669465\times(95-64)-1728\times(36805-24795)=135.$$

这样便得到满足条件之最小正整数$p=95-64=31$。由此得三统

历上元积年$N=4617\times31=143127$，合于《汉书·律历志》的记载。

又查《汉书·律历志》"世经"关于三统上元积年另有两条记录与此推算吻合，可为佐证。

其一云："三统，上元至伐桀之岁，十四万一千四百八十岁，岁在大火房五度。"

141480年岁星所行周天数为：

$$141480\times\frac{145}{1728}=11871\frac{1512}{1728},$$

其余数化为次，即$\frac{1512}{1728}\times12=10.5$次，这正与《汉书》所载"大火，……中房五度"相合(参看附图二)。

其二云："三统，上元至伐纣之岁，十四万二千一百九岁，岁在鹑火张十三度"。

142109年岁星所行周天数为：

$$142109\times\frac{145}{1728}=11924\frac{1133}{1728},$$

其余数化为次，即$\frac{1133}{1728}\times12=7.868$次。约在鹑火之次的$\frac{26}{30}$至$\frac{27}{30}$之间。据鹑火"终于张十七度"的记载，此正当"鹑火张十三度"(参见附图一与二)。

至于三统"太极上元"为23639040年乃由"日月合璧、五星联珠"之要求而定，则与此不同。

《古四分历》上元积年之计算

《汉书·律历志》"世经"记载："四分，上元至伐桀，十三万二千一百一十三岁，其八十八纪，甲子府首。"

上述古四分历上元积年数乃刘歆据周历所推，其计算方法当与三统历类似。查四分历年月日与甲子之循环周期为1520年(称为"纪法")，于是，四分上元至太初元年之积年数$N=1520p$，(p为正整数)。由此得岁星N年所行周天为

$$1520\times p\times\frac{145}{1728},$$

其余数r应与135相近。

按通其率术演算如下：（这里$a=1520\times145=220400$，$b=1728$）

$e_i\downarrow$					$c_i\downarrow$
		220400	1728	127	
1		219456	944		127
1	1	944	784	1	128
2		784	640		225
9	4	160	144	1	1148
11		144	144		1403
108	9	16	0		13775

于是有

$$13775\times11-108\times1403=1,$$

$$220400\times11-1728\times1403=16。$$

由此知余数r应为16之整倍数。与135邻近之16的整倍数有：$135-8\times16=7$；$9\times16-135=9$。自然选取$r=8\times16=128$。即有

$$220400\times88-1728\times11224=128。$$

故得$p=88$，即所谓"八十八纪"，而$N=1520\times88=133760$。考伐桀之岁至太初元年为1647年，故四分上元至伐桀为$133760-1647=132113$年，与"世经"所述完全相符。

《东汉四分历》上元积年之计算

《后汉书·律历志》记载："从上元太岁在庚辰以来，尽熹平三年，岁在甲寅，积九千四百五十五岁。"

考东汉四分历，"仲纪之元起于孝文皇帝后元三年"，即公元前161年甲子、夜半、朔旦、冬至齐会。而四分历"纪法千五百二十"，故若设四分历元至汉文帝后元三年积年数为N，则$N=1520\times p$，（p为正整数）。

p 值如何确定？汉代历家师弟相承，其算法当仿“三统”由岁星而定。查熹平三年当公元174年，距太初元年278年。若按“三统”推算岁星行度，约在4.868至4.896次之间，[①]即熹平三年岁星约在毕8°。(参见附图)但据《后汉书·律历志》“贾逵论历”指出，东汉编䜣、李梵制四分历时，冬至点比三统历前移五度左右（此时冬至点在斗$21\frac{1}{4}$）[②]，约折合为0.164次。后汉四分历其岁次当与三统历相承，岁星之起点仍先于冬至点半次（即在斗7°）[③]。由此推断熹平三年实测岁星所在约为5.032至5.060次之间。按东汉四分历木星日行度为$\frac{398}{4725}$[④]，由此推算，熹平三年木星当在周天的$\frac{1981}{4725}$至$\frac{1992}{4725}$之间。

查文帝后元三年当公元前161年，距熹平三年335年，按四分历推算岁星所在，得

$$-28+\frac{951}{4725}\leqslant\frac{r_1-398\times335}{4725}\leqslant-28+\frac{962}{4725},$$

(因为$1981\leqslant r_1\leqslant1992$)，即文帝后元三年，岁星应在周天之$\frac{951}{4725}$至$\frac{962}{4725}$之间。

---

① 按三统历法，熹平三年岁星行度为

$$T=\frac{145}{1728}\times278+\frac{r}{1728},\quad(135\leqslant r\leqslant139),$$

即

$$23+\frac{701}{1728}\leqslant T\leqslant23+\frac{705}{1728},$$

由

$$\frac{701}{1728}\times12=4.868;\qquad\frac{705}{1728}\times12=4.896,$$

知当年岁星约在4.868至4.896次之间。

② “贾逵论历”：“太初历冬至日在牵牛初者，……案行事史官注，冬、夏至日常不及太初历五度，冬至日在斗二十一度四分度之一。”

③ 参见附图一与二，但注意此时岁星在毕8°，冬至点改在斗$21\frac{1}{4}$°，上元时岁星改在斗7°。

④ 《后汉书·律历志》：“木，……通率日行四千七百二十五分之三百九十八。”

根据上述，$N(=1520p)$ 年岁星所行为周天之 $1520p\times\frac{398}{4725}=\frac{604960p}{4725}$，所得余数$r$应在951至962之间。

按通其率术推算：

$c_i\downarrow$		604960	4725	128	$c_i\downarrow$
1		604800	4640		128
29	29	160	85	1	3713
30		85	75		3841
59	1	75	10	7	7554
443		70	10		76719
945	2	5	0		120992

于是，知

$$604960\times945=4725\times120992,$$
$$604960\times443-4725\times56719=5,$$

故余数r应为5之整倍数，自然取中值$r=960$，

得 $604960\times443\times192-4725\times56719\times192=960$，

而 $443\times192=85056=4725\times18+16$，

故知 $604960\times6-4725(56719\times192-604960\times18)=960$。

即得$p=6$为所求之最小正整数。于是$N=1520\times6=9120$，为历元至文帝后元三年之积年；$9120+335=9455$，恰为《后汉书》所载四分上元至熹平三年之积年数。

关于《乾象历》上元积年之计算

《晋书·律历志》记载："上元己丑以来，至建安十一年丙戌，岁积七千三百七十八年。"

刘洪"潜精内思二十余载，参校汉家太初、三统、四分历术"，"欲改四分"，①而造《乾象》。因而，其上元积年之推算当在三统、

① 见《晋书·律历志》中，"徐岳议"。

四分历术的基础上有所修改。查《乾象历》有"乾法一千一百七十八"，即年月日与甲子的最小公倍数为1178年；而乾象上元距太初元年积岁恰为1178×6=7068年①，由此推知乾象历元规定起于冬至、朔旦、甲子日夜半，并利用了太初元年前十一月甲子、朔旦、冬至会合的条件。即假定乾象历元至太初元年的积年数

$$N=1178\times p,\qquad (p\text{为正整数})。$$

刘洪取$p=6$是如何确定的？由实际计算可知，乾象不同于三统之由"岁在婺女六度"而定②。据《晋书·律历志》中，"孙钦议"云："至熹平中，刘洪改为乾象，推天七曜之符，与天地合其叙。"又见乾象载有"推五星"术："置上元尽所求年，以周率乘之，满日率得一，名积合，不尽为合余。"由上述记述推测，乾象历元可能还有"日月合璧"、"七曜同宫"之类更为理想的条件。它要求解多个形如

$$m\times 1178p\equiv r\ (\mathrm{mod}\ a)$$

的一次同余式组，这必然促使通其率算法向求一术的演变趋于完善。例如，乾象历土星日行度为$\frac{124}{3653}$③，由它推算历元至太初元年积岁，需解一次同余问题：

---

① 建安十一年当公元206年，距太初元年计310年，故乾象上元距太初元年积岁7378−310=7068年。

② 《晋书·律历志》"五星历步术"："木，……凡一终，三百九十八日三百四十八万四千六百四十六分，行星三十三度二百五十万九千九百五十六分。"（这里1°=3959258′）。于是

$$木星日行度=\frac{33\frac{2509956}{3959258}}{398\frac{3484646}{3959258}}=\frac{133165470}{1579269330}=\frac{619}{7341}，$$故木星经7068年所行周天：$7068\times\frac{619}{7341}=595.9804$与"岁在婺女六度"不符。

③ 《晋书·律历志》"五星推步术"，"土，……凡一终，三百七十八日十六万六千二百七十二分，行星十二度百七十三万三千一百四十八分。"（这里1°=2078581′）。由类似注①的计算，可得日行度为$\frac{124}{3653}$。

$$124\times1178p\equiv r\ (\mathrm{mod}\ 3653)。$$

按通其率计算(124×1178=146072):

$e_i\downarrow$		146072	3653	39	$c_i\downarrow$
1		142467	3605		39
1	1	3605	48	75	40
76		3600	45		3039
685	9	5	3	1	27391
761		3	2		30430
1446	1	2	1	1*	57821
2207		1	1		88251
3653	1	1	0		146072

值得注意的是，为了得到关系:

$$146072\times2207-3653\times88251=1$$

取$q_7^*=1$(而不取$q_7=2$)，通其率算法的这种变化，相当于在最后二相邻渐近分数间插入中间分数$\frac{2207}{88251}$，它标志着“求一术”的完全成熟和“调日法”的萌芽。

诚然，我们不能武断地认为汉代历家推算历元的具体步骤如前所述。但是，从“三统”到“乾象”，汉代历家在三百余年的历元计算中创造了处理一次同余问题的数学方法是可以理解的，而在这个过程中由通其率算法演进为后来所谓的求一术也是很自然的事。钱宝琮关于“大约公元三世纪历法工作者开始应用剩余定理计算上元积年”的推断是有道理的。

三、求一术的起源与传统数学的特色

关于求一术的起源问题，其实在秦九韶的《数书九章序》中早有切实的分析。所论有二:

其一，“圣有‘大衍’，微寓于《易》”，即认为《易经》中的卜筮古法中已蕴含着求一术之精微，它是求一术的远源。他列“蓍卦

发微"于大衍九问之首就有溯本穷源之意。①

其二，"历家演法颇用之"，即认为求一术是在历元推算的应用中发展起来的。他说："独大衍法不载《九章》，未有能推之者，历家演法颇用之，以为方程者误也。"又说："其书《九章》，惟兹弗纪。历家虽用，用而不知。"

秦九韶论大衍术的起源，对《孙子》物不知数问"却全没有提起"②，这不能归之于他对《孙子》的无知与疏忽。北宋元丰七年(公元1084年)秘书省刻印了《孙子算经》，此后南宋鲍澣之于公元1212至1213年间又将秘书省刻本在汀州翻刻。秦九韶"早岁侍亲中都(杭州)，因得访习于太史"，③他在研习《九章》之时是不可能不熟读《孙子》的。④秦氏全然不提孙子问题，可能是因为在他看来，这种数学游戏只是大衍求一术的"流"，而不是"源"。事实上，正是由于历史上历元推算具有神圣的意义⑤，它强有力地推动了一次同余问题的研究；而孙子问题在后世虽广为流传，但只是一种简单的普及，对大衍术理论本身的发展并无多大的影响。秦九韶认为大衍之术源于"历家演法"而非"孙子问题"，他的见解无疑比张敦仁高明得多。

秦九韶的序言还道出了这样一个历史事实：大衍术长期行用于历法，却又未能作为数学的一支(犹如"方程"、句股等那样)，在"算术"中得到应有的总结与发展。他把历法与数学的这脱节现象归咎于"内、外之别"。他写道："今数术之书，尚三十余家。天象历度，谓之缀术，太乙壬甲，谓之三式，皆曰内算，言其秘也。九章所载，即周官九数。系于方圆者为叀术，皆曰外算，对

① 参见拙著：《"蓍卦发微"初探》。

② 李俨〔2〕首先注意到这一点。

③ 据钱宝琮〔13〕考证，此当是嘉定十七年九月到宝庆元年七月间(1224-1225年)事。

④ 钱宝琮〔13〕则更认为："秦九韶青年时曾在杭州向太史局供职的人学习天文数学，了解到一些上元积年的推算方法。他把上元积年算法与《孙子算经》'物不知数'题的解法联系起来，就写出了他的大衍求一术。"

⑤ 参见陈遵妫：《中国古代天文学简史》。

内而言也。”而秦氏认为这种“内算”与“外算”的人为隔绝是不合理的，他主张“其用相通，不可岐二。”的确，古代历法的神秘主义把历法推算视为不可泄漏的天机，这使得历家许多杰出的数学创作被禁锢在狭小的圈子里不能得以传播，大衍术便是这样的一例。

大衍术之所以产生于中国古代而又在迂回曲折中前进，是同中国传统数学的特点分不开的。一方面历元推算的需要是大衍术发展的巨大动力，另一方面满足于实用的局限性阻碍了中算一次同余理论的进展。从中算理论自身的特点来看，传统数学以算为主，造成分数算法的早期发达；以筹为工具发展程序化算法，这些中算的特长为求一术的产生创造了“技术”的条件和理论的根据。但是，中算理论的算法表达形式，又不便于原理的阐发，以致遭到理论失传的危险。大衍术“历家虽用，用而不知”，并且在历法史上曾将它误称为“方程”而多年未能得以纠正①，可谓历算家疏于算理的表现。

正是由于上述这些原因，虽然大衍术的起源可以远溯西汉，但是古代文献中鲜有明确记载。这种情形常常使人迷惑不解，以致出现了“中国的求一术来源于印度的库塔卡”的奇怪说法。如上所述，大衍术之产生于古代中国，是有其特殊的历史背景和自身的理论渊源的。大衍求一术在中算史上表现出明显的继承性与独创性，它无疑是在中国传统数学的园地上土生土长的。

参 考 文 献

〔1〕〔清〕张敦仁：《求一算术》序。
〔2〕李俨，《大衍求一术的过去和未来》，《中算史论丛》第一集。
〔3〕钱宝琮：《求一术源流考》，《古算考源》。
〔4〕〔英〕李约瑟：《中国科学技术史》，第三卷，数学。

① 秦氏曰，“以为方程者误也。”又云：“所谓方程，正是大衍术。”严敦杰于〔22〕中列举宋元文献记载，认为“大衍求一术未定名之前，在历法中求上元积年用到这方面的方法时，把这方法叫‘方程’。”

〔5〕李俨，杜石然：《中国古代数学简史》。
〔6〕钱宝琮主编：《中国数学史》。
〔7〕李文林，袁向东：《论汉历上元积年的计算》，《科技史文集》，第三辑。
〔8〕沈康身：《更相减损术源流》，《自然科学史研究》，第一卷，第三期。
〔9〕李继闵：《“其率术”辨》，《中国数学史论文集》(一)。
〔10〕李继闵：《“通其率”考释》，《中国数学史论文集》(一)。
〔11〕严敦杰：《中国古代数理天文学的特点》，《科技史文集》，第一辑。
〔12〕李继闵：《略论〈九章算术〉理论体系之特色》，《〈九章算术〉与刘徽》。
〔13〕钱宝琮：《秦九韶〈数书九章〉研究》，《宋元数学史论文集》。
〔14〕A·Я.辛欣：《连分数》，上海科技出版社。
〔15〕李继闵：《“调日法”源流考》，第三届中国科学史国际讨论会论文。
〔16〕新城新藏：《东洋天文学史研究》。
〔17〕〔清〕李锐：《李氏遗书》，“三统术注”。
〔18〕刘坦：《中国古代之星岁纪年》。
〔19〕李继闵：《中国古代的分数理论》，《〈九章算术〉与刘徽》。
〔20〕李继闵：《“百鸡术”之演进》，待发表。
〔21〕陈遵妫：《中国天文学史》。
〔22〕严敦杰：《宋金元历法中的数学知识》，《宋元数学史论文集》。
〔23〕陈遵妫：《中国古代天文学简史》。

《数书九章》中的大衍类问题及大衍总数术

袁向东、李文林

秦九韶的《数书九章》，开宗第一卷就是大衍类问题，即现代所谓一次同余方程组问题。秦九韶经过潜心研究，酿成了他的得意之作——"大衍法"，或称"大衍总数术"。在书的序言里，秦九韶对前人的著述略以小结："今数术之书，尚三十余家。天象历度，谓之缀术，太乙壬甲，谓之三式，皆日内算，言其秘也。九章所载，即周官九数，系于方圆者为叀术，皆日外算，对内而言也，其用相通，不可岐二。"接着，他笔锋一转，写道，"独大衍法不载九章，未有能推之者。历家演法颇用之，以为方程者误也。"这可谓秦九韶画龙点睛之语，表示其内心的自豪。纵观不定分析的发展史，正是他"探索杳渺"，终于"粗若有得"，成为第一位完整而系统地提出解一次同余方程组方法的数学家，[1],[2],[3]他的自豪是无可非议的。

正如秦九韶所指出，古代历法家确定上元积年，常要遇到同余问题。这是产生和推动我国古代不定分析研究的重要源泉。[4]秦九韶总结前人的工作，抓住了这类问题的共性，进而触类旁通，设计出许多可用大衍法解决的具体问题。在《数书九章》卷一、卷二中，秦九韶给出的九道大衍类问题，涉及砌砖、筑堤(建筑工程)；斛粜(粮食买卖)；酒息(利息换算)；急足(信息传递)；积日(历法)等内容，扩大了大衍法的应用范围，这是值得称道的。

本文，就大衍法的结构、大衍类各题的含意及解法，大衍法中几个有特色的概念略加探究。

一、秦九韶“大衍总数术”的结构

为了便于理解和比较，我们先给出按现代的理论解一次同余方程组的步骤。

（Ⅰ）列同余方程组

$$\begin{cases} N \equiv R_1 (\mathrm{mod} A_1) \\ \quad \equiv R_2 (\mathrm{mod} A_2) \\ \quad \vdots \\ \quad \equiv R_m (\mathrm{mod} A_m) \end{cases} \tag{1}$$

其中，A_i为模数，R_i为余数，N为所求数。

（Ⅱ）判断(1)是否可解。

1．若模数两两互素，即$(A_i, A_j)=1$，$\forall i, j, i \neq j$，则(1)可解。①

2．若模数非两两互素，需判断下列关系是否满足：

$$R_i - R_j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ d_{ij}), \quad \forall i, j, \ i \neq j, \tag{2}$$

其中$d_{ij}=(A_i, A_j)$。

1）当(2)成立，则(1)可解。此时，可将各模数分解成素因子的积，经化约，得到(1)的等价同余式组

$$\begin{cases} N \equiv R_1 (\mathrm{mod} a_1) \\ \quad \equiv R_2 (\mathrm{mod} a_2) \\ \quad \vdots \\ \quad \equiv R_m (\mathrm{mod} a_m) \end{cases} \tag{3}$$

其中，a_i是A_i的因子，且$(a_i, a_j)=1$，$i \neq j$；$\prod_{i=1}^{m} a_i$等于原模数A_1，A_2，…，A_m的最小公倍数，记作M。

2）当(2)不成立，则(1)不可解。

（Ⅲ）在可解的条件下，找出一组k_i，使满足

① (A_i, A_j)表示A_i，A_j两数的最大公因子

$$k_i\frac{M}{a_i}\equiv 1(\mathrm{mod}\, a_i) \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m. \tag{4}$$

（Ⅳ）由下式计算出(3)的最小正数解：

$$N=\left(\sum_{i=1}^{m} R_i k_i \frac{M}{a_i}\right)-pM \tag{5}$$

其中，p是整数，使$0<N\leqslant M$。

秦九韶解一次同余式组的大衍总数术，由下列步骤构成：

（Ⅰ）′确定“问数”（即模数 A_i）和余数（即R_i）。秦九韶一般在问题中直接给出它们的数值，有时需对题设中数据稍加演算而得。步骤（Ⅰ）′和（Ⅰ）是一致的，因为（Ⅰ）的实质并不在于方程的形式本身，而是确定供进一步运算的初始数据A_i和R_i。

（Ⅱ）′在事先并不考虑A_i是否两两互素，是否满足可解条件的情况下，利用一些算法，将问数化约为定数（或称定母，即a_i），具体做法是：

1． 将问数分为元数（A_i皆是整数）、收数（A_i中有小数）、通数（A_i中有分数）和复数（A_i皆为 10 的倍数）等四种类型。每一类型都附有相应的算法，称做格，即有元数格、收数格、通数格、复数格。属于某一类的问数按相应的格化约，但在一定条件下，需转入其它格继续运算。

2． 在元数格，秦九韶列出了两种主要算法，我们记之为：

算法Ⅰ “两两连环求等”“约奇勿约偶或约偶勿约奇。”①

算法Ⅱ （A）“或元数俱偶，约毕可存一位见偶”；

（B）“或皆约而犹有类数存，姑置之，俟与其他约遍，而后乃与姑置者求等约之。”

算法Ⅰ或算法Ⅱ将使得经化约后的各问数的连乘积恰为原问数的最小公倍数，但它们不一定两两互素。

3． 在复数格，秦九韶又给出另两种算法，对经算法Ⅰ或Ⅱ

---

① 关于算法Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ的解释，详见[2]115—119页。

化约后各问数的因子进行调整，使问数两两互素。秦特别指出："所有元数、收数、通数三格，皆有复乘求定之理，悉可入之。"我们记这两种算法为：

算法Ⅲ "两两连环求等，约奇弗约偶，复乘偶；或约偶弗约奇，复乘奇。"

算法Ⅳ "或彼此可约而犹有类数存者，又相减以求续等，以续等约彼则必复乘此。"

按照秦九韶设计的这四种算法，经化约得到的定数满足：(i)各定数为相应原问数的因子；(ii)各定数的连乘积等于原问数的最小公倍数；(iii)各定数两两互素。

与上述(Ⅱ)比较，步骤(Ⅱ)′得到同样的结果a_i。但秦九韶似乎完全没有注意(Ⅱ)中考虑的两个可解性判断。(Ⅱ)要求先判断A_i是否两两互素，而(Ⅱ)′直接对A_i施以**算法**Ⅰ(或Ⅱ)。实际上，**算法**Ⅰ(或Ⅱ)不仅有约去问数中多余因子的功能，同时也鉴别了互素性。我们以**题5**分粜推原和**题9**余米推数为例说明之。

题5 分粜推原中的问数是83，110，135，施以**算法**Ⅱ，运算图如下：

$$\begin{matrix}甲 & 83 \\ 乙 & 110 \\ 丙 & 135\end{matrix}\xrightarrow[\text{不约}]{(甲，乙，丙)=1}\begin{matrix}83\\110\\135\end{matrix}\xrightarrow[\text{用5约丙，不约乙}]{(丙，乙)=5}\begin{matrix}83\\110\\27\end{matrix}\ \text{—}\cdots$$

$$\xrightarrow[\text{不约}]{(丙，甲)=1}\begin{matrix}83\\110\\27\end{matrix}\xrightarrow[\text{不约}]{(乙，甲)=1}\begin{matrix}83\\110\\27\end{matrix}$$

经两两连环求等相约的步骤，已消去了多余的因子5，得到两两互素的一组定数。

题9 余米推数中的问数是19，17，12。秦九韶施以**算法**Ⅰ，运算图如下：

甲	19		19		19		19
乙	17	$\xrightarrow[\text{不约}]{(\text{丙},\ \text{乙})=1}$	17	$\xrightarrow[\text{不约}]{(\text{丙},\ \text{甲})=1}$	17	$\xrightarrow[\text{不约}]{(\text{乙},\ \text{甲})=1}$	17
丙	12		12		12		12

所得定数与原问数相同，说明原问数是两两互素的。用秦九韶的术语，即诸数已“尽类”。

对于题9，施以算法Ⅰ似乎是多余的，因为解题者一眼就能判定原问数是互素的。但秦九韶追求的是一般化的算法，对于任给定的一组问数（可能很复杂），要判断其互素性，确实需要经过两两求公因子的过程。更有趣的是，秦九韶的方法颇适合在计算机上应用，因为对于无论怎样简单的一组数，机器都要经两两求公因子才能判断其互素性。这里，我们并非想暗示秦九韶独具慧眼，在七个世纪前就设计了在电子计算机上使用的算法，而只是说明：秦九韶的思想很符合现代算法的特点，因此，其方法适用于计算机。

应指出，步骤（Ⅱ）′并不包含(2)式是否成立的判断，但秦九韶很可能知道这一可解条件，比利时数学史家李倍始（U. Libbrecht）对此有过分析①。

（Ⅲ）′利用一种机械化的算法②——秦九韶称之为大衍求一术，计算乘率，即k_i。

大衍求一术是秦九韶首创的，其演算过程、方法的合理性、以及历史地位，都已有详尽的讨论[1][3][5]。现只就秦九韶在《数书九章》中给出的算草布式作一说明。

“大衍求一术云：置奇右上，定居右下，立天元一于左上。先以右上除右下，对得商数与左上一相生，入左下。然后乃以右行上下，以少除多，递互除之，所得商数，随即递互累乘，归左行上下，须使右上末后奇一而止。乃验左上所得，以为乘率。或奇数已见单一者，便为乘率。”

① 参见〔3〕373—374页。

② 参见〔2〕119—120页。

据秦九韶的术语，术文中的定是指定数，即 a_i。秦九韶称(4)中的 $\frac{M}{a_i}$ 为衍母，当 $\frac{M}{a_i}>a_i$ 时，他用 a_i 除 $\frac{M}{a_i}$，除得的余数我们记作 g_i ($g_i<a_i$)，于是将(4)归结为

$$k_i g_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ a_i) \quad (6)$$

秦九韶称 g_i 为奇数，此段术文中的奇即指奇数。"天元一"即是数1，此处"天元"二字只是为了强调这个1在整个计算中的重要性。术文的大部分文字，含义清楚，无需赘述，只是"须使右上末后奇一而止"到底如何实现，是否一定能实现，术文中未详。秦九韶所演的**题1**蓍卦发微，通过具体例证给出了大衍求一术的算草布式，同时也非常明确地讲明了那句话的含义。此题中的一组奇、定为 $a_1=3$，$g_1=4$，要求乘率 k_1。秦九韶的算草布式如下：

"列衍奇三于右上，定母四于右下，立天元一于左上，空其左下。"(释文：右上位置写奇数3，右下位置写定数4，左上位置写1，左下位置写零。)(图1)

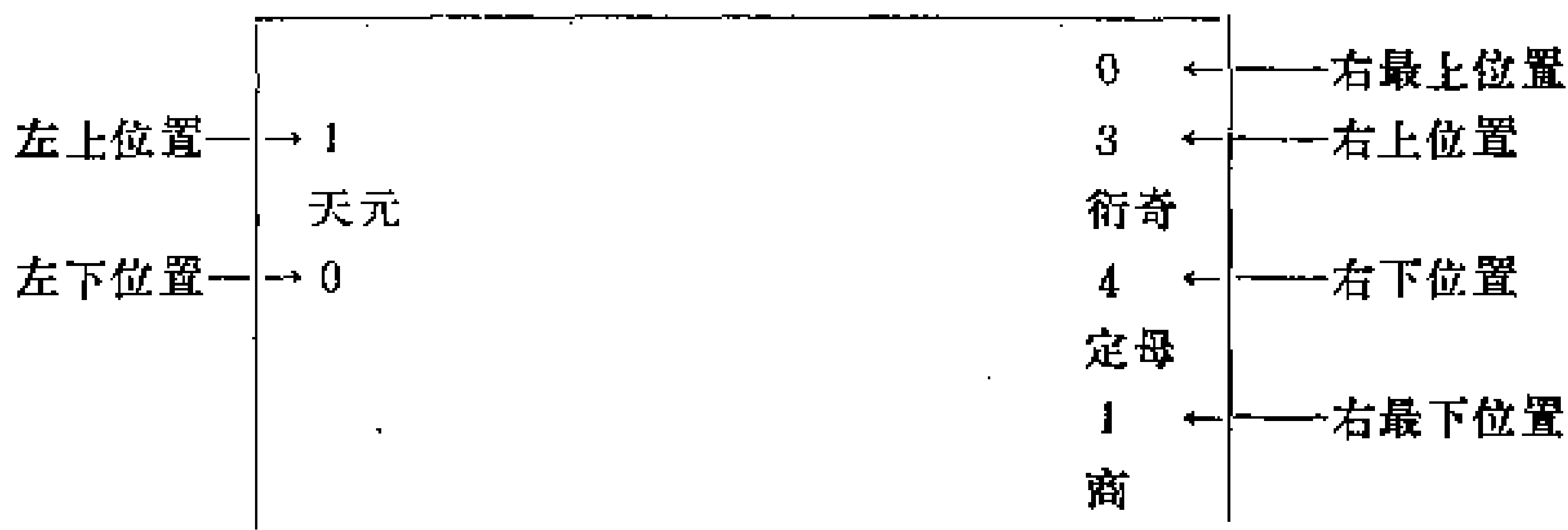


图 1

2. "先以右上少数三，除右下多数四，得一为商。以商一乘左上天元一，只得一，归左下，其右下余一。"(释文：首先，用位于右上位置的较小的数3，除右下位置上的较大的数4，商为1，用商1乘左上位置的1，得1，将此乘积加到左下位置的0上去，得归数1。3除4的余数1写在右下位置。)(图2)

	1			3	
天		元	衍		奇
	1			1	
归		数	定	母	余
				0	

图 2

3. “次以右下少数一除右上多数三①，须使右上必奇一算乃止，遂于右行最上商2，以除右衍，必奇一。乃以上商，命右下定余一除之，右衍余一。”（释文：再用位于右下位置的较小的数1，除位于右上的较大的数3。为了使得右上位置的余数为1，以便结束计算，故而应商2，写在右最上位置，此时余数肯定是1。于是，按上面指定的商，做1除3，右上位置的衍余为1）（图3）

				2	
				商	
	1			1	
天		元	衍	奇	余
	1			1	
归		数	定	母	余

图 3

秦九韶的这段文字说明，凡当右下位置出现1，而右上位置尚不是1时，都可以用他的办法使余数为1，即让右上位置出现1。这是大衍求一术中的重要技法。

4 “次以商二与左下归数相乘，得二，加入左上天元一内，共得三。今验右上衍余，得1当止，乃以左上三为乘率。”（图4）

① 按常规，此时应商3，除得的余数为零。但为保证“右上必奇一算乃止”，秦设计了另外的办法。

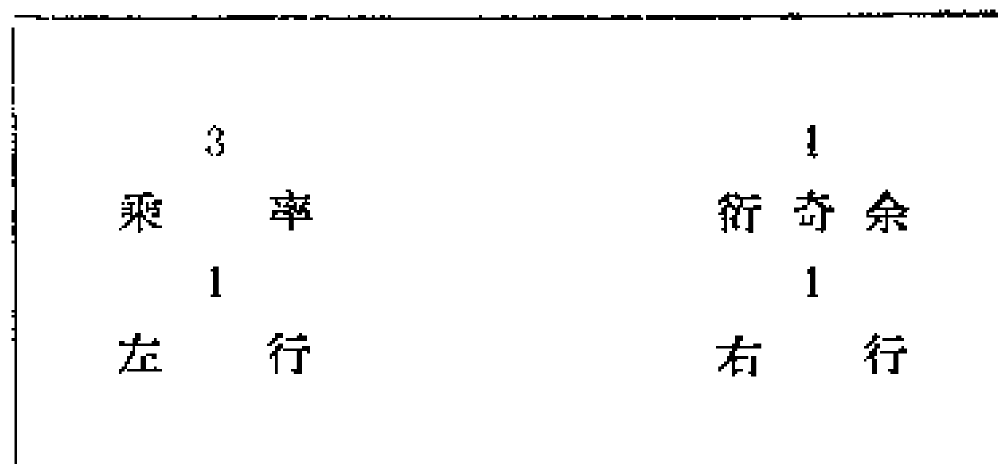


图 4

从以上布式可知，用算筹施行大衍求一术，层次分明，简单易行。如果把它转换成程序语言，更是一目了然：对每个固定的 i，按下列步骤运算，

1) 计算 A_i/g_i，得商 q_1，余 r_1（即 $A_i=g_iq_1+r_1$）；令 $c_1=q_1$，

2) 计算 g_i/r_1，得商 q_2，余 r_2（即 $g_i=r_1q_2+r_2$）；令 $c_2=q_2c_1+1$，

3) 计算 r_1/r_2，得商 q_3，余 r_3（即 $r_1=r_2q_3+r_3$）；令 $c_3=q_3c_2+c_1$，

⋮

n) 计算 r_{n-2}/r_{n-1}，得商 q_n，余 r_n（即 $r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n$）；令 $c_n=q_nc_{n-1}+c_{n-2}$

以上计算过程中，需判断是否 $r_n=1$.

$n+1$) 当 $r_n=1$ 时，检查 n 的奇偶性

若 n 为偶数，则 $k_i=c_n$，

若 n 为奇数，做 $n+2$)

$n+2$) 令 $q_{n+1}=r_{n-1}-1$，取 $c_{n+1}=q_{n+1}c_n+c_{n-1}$

则 $k_i=c_{n+1}$.

上述方法，可以从理论上证明是正确的①.

(Ⅳ)′由(5)算出所求的最小正数解，这与(Ⅳ)完全相同。

综上所述，我们可以得出如下结论，秦九韶从算法的角度，给出了解一次同余式组的完整方法。现代的方法，基本上就是秦九韶的大衍总数术。

① 参见[1]，68页。

二、秦九韶大衍类各题的分析

《数书九章》的大衍类共九题，现逐题解释题意①，并仍采用文〔2〕中使用的运算图，如实地重现秦九韶解题的算草，以便了解他是如何使用四种算法的。

1．蓍卦发微　我国古代用蓍草的茎占卜。《周易·系辞传》上说，“大衍之数五十，其用四十有九”，即起课时只用49枝蓍草茎，留着一枝备而不用。秦九韶试图用大衍法来解释。他在自序中说，“昆仑旁礴，道本虚一，圣有‘大衍’，微寓于《易》。奇、余取策，群数皆捐，衍而究之，探隐知原。”看来，秦九韶在精心研究出大衍法之后，极力想把他的杰作，与当时理学家推崇的《易经》融合在一起。实质上，本题并不是同余问题，在本题“问”中，秦九韶也只给出了四个问数1，2，3，4，而并无余数。但应指出，本题“术”“草”，给出了用算法Ⅰ化约问数为两两互素的标准过程：

$$\begin{array}{cc} 上 & 1\\ 付 & 2 \\ 次 & 3\\ 下 & 4\end{array} \xrightarrow[\text{不约}]{(上，付)=1} \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} \xrightarrow[\text{不约}]{(上，次)=1} \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} \xrightarrow[\text{不约}]{(上，下)=1} \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} \text{——}\cdots$$

$$\xrightarrow[\text{不约}]{(付，次)=1} \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} \xrightarrow[\text{用 2 约付，不约下}]{(付，下)=2} \begin{array}{c}1\\1\\3\\4\end{array} \xrightarrow[\text{不约}]{(次，下)=1} \begin{array}{c}1\\1\\3\\4\end{array}$$

还给出了用大衍求一术计算乘率的唯一的一个算草布式（已在前面述及）。因此，虽然本题内容穿凿附会，但对今人了解秦九韶的方法是有益的。

---

① 参见〔1〕。〔3〕中亦有各题含义的解释。

2. 古历会积 “古历”指战国时期制定的四分历，取回归年日数为$365\frac{1}{4}$日，朔望月日数为$29\frac{499}{940}$日，甲子一周自然是60日。我们知道，古历的上元指历法的起算点，应满足冬至，朔旦、甲子发生在同一时刻。本题假设淳祐六年(1246)十一月初一是丙辰日(距甲子日差8天)，冬至时值初五(距甲子日差4天)，初九才是甲子日。题目要求从上元至1246年经过的年数。若记从上元到1246年十一月初九的日数为N，则N正好被60除尽；而用$365\frac{1}{4}$除N余4；用$29\frac{499}{940}$除N余8。因此本题欲解下列同余式组：

$$\begin{cases} N\equiv 0 \pmod{60} \\ \quad\equiv 4 \left(\bmod\ 365\frac{1}{4}\right) \\ \quad\equiv 8 \left(\bmod\ 29\frac{499}{940}\right)。\end{cases}$$

秦九韶在推演本题时犯有不少错误，钱宝琮先生已有详细分析[1]，不再赘述。这里仅列出他化约问数的正确过程：

原问数为$365\frac{1}{4}$，$29\frac{499}{940}$，60，秦用4×940遍乘各数，分别得1373340(气分)，111036(朔分)，225600(纪分)。再施以算法Ⅱ：

$$\begin{array}{lllll} \text{气分} & 1373340 & & 114445 & \\ \text{朔分} & 111036 & \xrightarrow[\text{用12约气分，朔分，不约纪分}]{(\text{气分，朔分，纪分})=12} & 9253 & \xrightarrow[\text{不约}]{(\text{纪分，朔分})=1} \\ \text{纪分} & 225600 & & 225600 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} 114445 & & 487 & & 487 \\ 9253 & \xrightarrow[\text{用235约气分，不约纪分}]{(\text{纪分，气分})=235} & 9253 & \xrightarrow[\text{用487约朔分，不约气分}]{(\text{朔分，气分})=487} & 19 \\ 225600 & & 22560 & & 225600 \end{array}$$

3. 推计土功 题称需筑宽2丈的堤一段，由甲、乙、丙、丁四县平均分摊任务。各县民工数由该县财力多少确定，规定每770贯出一名，每个民工每日修堤的底面积应达60平方尺。已知甲、乙、丙、丁各县财力分别为138600贯，146300贯，192500贯，184800贯。并知民工先到的县先动工。当甲、乙两县完工

时，丙县尚差51丈，丁县差18丈，这两个数都不到他们各自一日的工作量。欲求堤长。

这是个同余问题，但题问中没有直接给出问数，而只给了余数。秦九韶在术中，按下式算出各问数：

$$
\begin{aligned}
(\text{各县})\text{每日筑堤长度} &= (\text{各县})\text{应出民工数} \\
&\quad \times \text{每人每日筑堤长度} \\
&= \frac{(\text{各县})\text{财力(贯)}}{770(\text{贯})} \times \frac{60(\text{平方尺})}{20(\text{尺})}
\end{aligned}
$$

代入各县财力数，得甲、乙、丙、丁各县每日筑堤长度分别为54丈，57丈，75丈，72丈。故同余式组可记为

$$
\begin{aligned}
N &\equiv 0 \pmod{54} \\
&\equiv 0 \pmod{57} \\
&\equiv 51 \pmod{75} \\
&\equiv 18 \pmod{72}
\end{aligned}
$$

化约问数时，秦九韶使用了**算法**Ⅱ和**算法**Ⅳ：

		(甲，乙，丙，丁)＝3 用3约乙，丙，丁，不约甲		(丁，丙)＝1，(丁，乙)＝1 不约		
甲	54		54		54	
乙	57	→	19	→	19	→…
丙	75		25		25	
丁	72		24		24	

(丁，甲)＝6 用6约甲，不约丁		(丙，乙)＝1，(丙，甲)＝1 不约		(乙，甲)＝1 不约	
	9		9		9
→	19	→	19	→	19
	25		25		25
	24		24		24

复验(甲，丁)＝3 用3约丁，复乘甲	
	27
→	19
	25
	8

4. 推库额钱　这是有关钱库交息的财政问题。其中涉及的同余问题是，有七个钱库甲、乙、丙、丁、戊、己、庚，按一千文铜钱兑一贯的标准兑换率(即所谓足钱)，各库每日应交纳的息钱相等。当时，甲库所在地用12文铜钱，就可兑换面值 100 文的会子[①]，其余各库所在地兑换 100 文会子的铜钱数依次少一文。题设甲库应交日息，以当地兑换率12文为单位数之，最后余 10 文；丁库以 9 文为单位数之余 4 文；戊库以 8 文为单位数之余 6 文；庚库以 6 文为单位数之余 4 文。其余各库按当地兑换率为单位数之皆无余。求各库日息足钱N。则N应满足：

$$
\begin{aligned}
N &\equiv 10 \pmod{12} \\
&\equiv 0 \pmod{11} \\
&\equiv 0 \pmod{10} \\
&\equiv 4 \pmod{9} \\
&\equiv 6 \pmod{8} \\
&\equiv 0 \pmod{7} \\
&\equiv 4 \pmod{6}
\end{aligned}
$$

秦九韶在本题术中说，用"连环求等，约奇弗约偶得定母"。但未给出详细算草，现根据他的算法 I 复原之。

甲	12		12		12	12
乙	11		11		11	11
丙	10		10	(庚，丙) = 1	10	10
丁	9	(庚，己) = 1 (庚，戊) = 2 ——→ 用 2 约庚，不约戊	9	(庚，丁) = 3 ——→ 用 3 约庚，不约丁	9	(庚，乙) = 1 (庚，甲) = 1 ——→ 不约	9
戊	8		8		8	8
己	7		7		7	7
庚	6		3		1	1

① 会子：南宋时发行的一种纸币，用于纳税及一般交易。三年换发一次，并兑换现钱。后因军费开支庞大，发行纸币过滥而贬值，此题反映了这种社会情况。

12, 11, 10, 9, 8, 7, 1 ——(己，戊)＝1，(己，丁)＝1，(己，丙)＝1，(己，乙)＝1，(己，甲)＝1 皆不约——→ 12, 11, 10, 9, 8, 7, 1

——(戊，丁)＝1，(戊，丙)＝2，用2约丙，不约戊——→ 12, 11, 5, 9, 8, 7, 1

——(戊，乙)＝1，(戊，甲)＝4，用4约甲，不约戊——→ 3, 11, 5, 9, 8, 7, 1

——(丁，丙)＝1，(丁，乙)＝1，(丁，甲)＝3，用3约甲，不约丁——→ 1, 11, 5, 9, 8, 7, 1

——以下连环求等皆得1，不约——→ 1, 11, 5, 9, 8, 7, 1

由化约得的这组定数，经大衍求一术得到$N=26950$文，按足钱折合成26贯950文。

本题除解上述同余问题外，还要求计算日息旧会。即按各地现行兑换率，算出日息足钱相当于过去使用的纸币钱数。秦九韶原文给出的答案，常被认为是错的而加以纠正①。我们认为秦九韶的答案是正确的。据宋景昌《数书九章札记》中称："甲库日息十一文，馆案云，应作五十文又六分之五。案，原文不误。盖甲库以十二文为一百，其未满十二者，十一文竟曰十一文，十文则竟曰十文，未尝升也。"据此原理，计算日息旧会应按下式进行（以甲库为例）：

$$(26950-10)\div 12\%+10$$
$$=224500+10$$
$$=224510(\text{文})=224\text{贯}510\text{文}。$$

① 参见[3]382页。

同理可得乙、丙、丁、戊、已、庚各库日息旧会分别为：245贯、269贯500文、299贯404文、336贯806文、385贯、449贯104文[1]。

按以上原则计算大、小月的旧会另钱，秦九韶原文中的答案也准确无误。仍以甲库为例。甲库日息旧会另钱为224510文，其中10文是尚未升值的另钱。当计算大月的旧会另钱时，应分两部分：

1. 先计算已升值的部分累计30天的值，即

$$224500\times30=6735000(\text{文})。$$

2. 再计算尚未升值的另钱部分，

$$10\times30=300(\text{文})。$$

由于300已超过当地市陌12文，故又有升值的问题。因300＝12×25，是12的整倍数，300文可全部按率升值

$$300\div12\%=2500(\text{文})。$$

上述两项合计才得大月旧会另钱：

$$6735000+2500=6737500(\text{文})。$$

计算小月(29天)的旧会另钱如法炮制，亦分两部分：

1. $224500\times29=6510500(\text{文})$。

2. $10\times29=290(\text{文})$，因$290=12\times24+2$，并非12的整倍数，故其中$12\times24=288(\text{文})$应升值，剩有另钱2文。这部分折合成旧会另钱为：

$$288\times12\%+2$$
$$=2400+2$$
$$=2402(\text{文})。$$

合计得小月旧会另钱为

$$6510500+2402$$
$$=6512902(\text{文})。$$

其它各库计算方法皆同，不一一赘述。

---

① 秦九韶按此法求得的值称为“旧会另钱”更妥当。他在原文中确实也用过这个词：“各以其库元陌纽计各得旧会另钱。”

5．分粜推原　题称有兄弟甲，乙，丙三人务农，所收获之米均分。各人将自己所得运往他乡出售。当时各地量器"斛"的标准不一。甲卖米给官场，官斛容八斗三升，甲卖出整斛后尚余三斗二升；乙往安吉乡卖米，安吉乡斛为一石一斗，卖出整斛数后余七斗；丙卖米给平江攙户，平江市斛容一石三斗五升，卖出整斛后计余三斗。问三人共收获米多少？这是典型的同余问题。设各人所得为N(升)，同余式组可记为

$$
\begin{aligned}
N &\equiv 32 \pmod{83} \\
&\equiv 70 \pmod{110} \\
&\equiv 30 \pmod{135}。
\end{aligned}
$$

秦九韶用算法Ⅱ化约问数的运算图前已述及。

6．程行计地　军队在前线打了胜仗，早点名时(在卯时进行，相当于现在的早晨5点)，派出急行传送消息的士卒甲、乙、丙三人，往京都报捷。已知甲最先到达，于某日申时末(相当于下午5点)到京城；乙于后几日的未时正(相当于下午2点)到达；丙迟于今日辰时末(相当于早上9点)才抵京。又知甲、乙、丙每日分别能走300里，240里和180里，问自前线至京都的距离N。经简单分析，知这是个同余问题[3]。只要注意甲、乙、丙每天实走六个时辰(从早5点至下午5点)，即知各人行路的速度：甲为300/6＝50(里/时辰)，乙为240/6＝40(里/时辰)，丙为180/6＝30(里/时辰)。根据他们出发时刻与到达时刻的差，知N是300的整倍数；N与240的整倍数差乙行四个半时辰的距离，即40×4.5＝180(里)；N与180的整倍数相差丙行二个时辰的距离，即30×2＝60(里)。因此，同余式组可记为：

$$
\begin{aligned}
N &\equiv 0 \pmod{300} \\
&\equiv 180 \pmod{240} \\
&\equiv 60 \pmod{180}
\end{aligned}
$$

秦九韶使用算法Ⅱ及算法Ⅲ化约问数，运算图如下：

甲	300		300		300
乙	240	(甲，乙，丙)＝60 / 用60约乙，丙，不约甲 →	4	(丙，乙)＝1 / 不约 →	4
丙	180		3		3
	算法Ⅱ(a)			算法Ⅱ(b)及算法Ⅲ	

	100		25
(丙，甲)＝3 / 用3约甲，复乘丙 →	4	(乙，甲)＝4 / 用4约甲，复乘乙 →	16
	9		9

注意，本题做完算法Ⅱ(a)后，即使用了"复乘求定之理"。原因是：本题总等$60=2^2\cdot3\cdot5$，未约甲。根据算法Ⅱ(b)"姑置求等相约"的规定，当甲与乙、丙继续连环求等相约时，不应再约去60中含的因子。秦九韶在演草中特别加了一段文字予以说明："于术约奇不约偶，盖以等三约三，因得一为奇，虑无衍数，乃便经先约甲三百为一百，复以等三乘丙三为九，即丙九为奇，甲百为偶，此即约奇弗约偶。"将这段文字与算草比较，似乎最后遗漏了三字"复乘偶"。分析经算法Ⅱ(a)得到的300，4，3知，其连乘积已是原问数的最小公倍数，秦九韶大约注意到这一事实，虽"于术"本应"约奇不约偶"，但"虑无衍数"①，便"约奇弗约偶，复乘偶"。

7. 程行相及　题设有甲、乙、丙三名急行传送消息的役卒，分别日行300里、250里、200里，现需往某地送文件。丙先出发，两天后乙出发，又过了半天，甲再出发。已知三人到达某地的时刻，与各自出发的时刻相同(原文为"乃同时俱至彼所，"宋景昌《数书九章札记》中指出："馆案云，题意为三行迟疾不同，乙后丙两日，甲后乙半日，问几日几里可以追及。又既及之后，三人

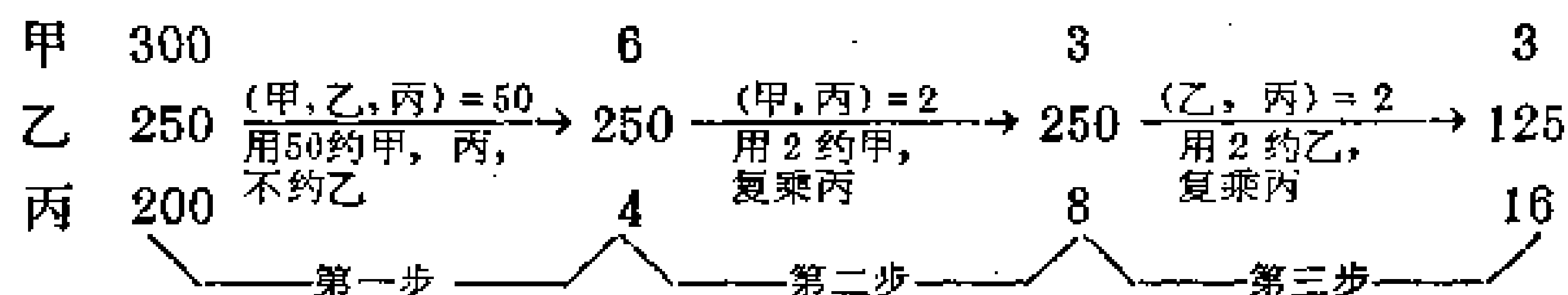
① 秦九韶令对应于定数为1的衍数为"无"。但虑无衍数并不能成为改"约奇不约偶"为"约奇弗约偶，复乘偶"的理由。这里，或者是秦九韶将"虑无衍母"误为"虑无衍数"，或者秦九韶并未指明作出改变的真正理由，而以"虑无衍数"惑众。

不能同行，及各至彼处之时刻，皆与各起程之时刻相同，盖言自此至彼所行皆为整日数也。”这种解释是正确的。)问：乙追及丙，甲追及乙各需的日数和经过的里数。并问某地距出发地的距离N。

前一问可用均输法解。至于第二问，由于甲、乙、丙三人由此及彼所用时间皆是整日数，同余式组为：

$$
\begin{aligned}
N &\equiv 0 \pmod{300} \\
&\equiv 0 \pmod{250} \\
&\equiv 0 \pmod{200}
\end{aligned}
$$

因此，本质上无须用大衍法解，只要求300，250，200的最小公倍数即得$N=3000$(里)。由于秦仍用大衍法解，推演时出现诸多弊病，文[1]中已有讨论。现在，我们试分析秦九韶在化约问数时的错误。秦九韶原来的化约过程为：



显然，所得定数虽两两互素，但其连乘积$3\times125\times6=6000$，并非原问数的最小公倍数。这是秦九韶解大衍类问题化约问数时出现的唯一的一处纰漏，原因是他没有按照自己设计的算法去做。试析如下：

运算图中的第一步是施行算法Ⅱ(a)。按标准算法，他应继续施行算法Ⅱ(b)。从原文中甲、乙、丙三数求等的顺序看，秦九韶似乎是想按“姑置求等相约”的办法去做，因为他没有如其它各题那样从列在最下面的数开始施行连环求等，即先求(丙，丁)，而是将在第一步运算中未约的乙“姑置之”，先对甲，丙求等。秦九韶的错误在于：甲丙求等后，应用“约奇弗约偶”的原则消去多余的因子，尚不能“复乘”。正确的做法是

甲	6		3
乙	250	$\xrightarrow[\text{用2约甲，不约丙}]{(\text{甲，丙})=2}$	250
丙	4		4
		——第二步——	

然后，在与“姑置者”乙求等相约时，由于姑置者250＝50×5，其中在第一步运算中保留的总等50中所含的因子（$50=2\times5^2$）不能再消去①，故用(乙，丙)＝2约时需复乘：

甲	3		3
乙	250	$\xrightarrow[\text{用2约乙，复乘丙}]{(\text{乙，丙})=2}$	125
丙	4		8

这样便得到了正确的定数。

秦九韶在求出错误的定数后，继续用大衍求一术求乘率，但本题余数皆为0，无法使用公式(5)。秦便硬凑出答案$N=3000$（里）。这不能不说是秦九韶演题不够严谨的一个例子。

8．积尺寻源　本题是房屋奠基用料问题。今需砌一处房基（呈长方形，一边称做广，一边称做深），现有四种砖料：大方料，每边长皆为1尺3寸；小方料，每边长1尺1寸；城砖，长、阔、厚各为1尺2寸、6寸和2分5分；六门砖，长、阔、厚各为1尺、5寸和2寸。欲请匠人任取定一种砖料，使得砌基时都用整砖（砖可正置，也可侧置）。匠人经测量知，无论用何种料，都不能做到恰好全用整料，而需用“破砖裨补”。若用大方料，基广多出6寸，基深则少6寸；若用小方料，广多2寸，深少3寸；用城砖的长来量，广多3寸，深少1寸；用城砖的阔量，广多3寸，深少1寸；用城砖的厚来量，广多5分，深多1寸；用六门砖的长、阔、厚来量，相应的广、深差额为：广多3寸，深多1寸；广多3寸，深多1寸；广多1寸，深多1寸。问该房基的广N_1和深N_2各是多少？

---

① 参见〔2〕，117页注2）。

这是典型的同余问题，N_1，N_2分别满足下列同余式组（皆用分做单位）：

$$
\begin{aligned}
N_1 &\equiv 60 \pmod{130}\\
&\equiv 30 \pmod{120}\\
&\equiv 20 \pmod{110}\\
&\equiv 30 \pmod{100}\\
&\equiv 30 \pmod{60}\\
&\equiv 30 \pmod{50}\\
&\equiv 5 \pmod{25}\\
&\equiv 10 \pmod{20},
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
N_2 &\equiv 70 \pmod{130}\\
&\equiv 110 \pmod{120}\\
&\equiv 80 \pmod{110}\\
&\equiv 10 \pmod{100}\\
&\equiv 50 \pmod{60}\\
&\equiv 10 \pmod{50}\\
&\equiv 10 \pmod{25}\\
&\equiv 10 \pmod{20}。
\end{aligned}
$$

秦九韶用算法Ⅰ化约问数为定数[①]。然后用大衍求一术计算乘率，得到N_2= 3 丈 7 尺 1 寸。秦九韶未在算草中写明计算N_1的过程，只是在题答中说N_1= 1 丈 2 尺 3 寸。经验算，其答案是正确的。

本题同余式组多达八个同余方程，足见秦九韶运用大衍法已相当纯熟自如。

9．余米推数　题设有贼人甲、乙、丙夜盗米铺。店内存有三箩米，各箩盛米数相同，具体数目不详。被盗后，靠左壁的箩内剩米一合，中间的箩剩一升四合，右壁的剩一合。破案后三贼皆已食用盗来之米，日久不知其数。甲供认作案时用马杓舀左壁

① 具体化约的运算图见[2]，116页。

箩中之米，乙供认用木履舀中间箩内之米，丙则称用漆碗舀出右壁箩中之米。已知马杓、木履、漆碗分别可容米一升九合，一升七合和一升二合。欲求所失米数及三盗各偷多少？

本题关键是先求出每箩原有米数N，这是同余问题，相当于求下列同余式组(以合为单位)。

$$N\equiv 1 \bmod (19)$$
$$\equiv 14 \bmod (17)$$
$$\equiv 1 \bmod (12)。$$

秦九韶用**算法**Ⅰ化约问数，详见本文第一部分。

通过对九道大衍类问题题意的分析，足见秦九韶对当时社会的经济生活是颇为熟悉的，这使他有可能触类旁通，扩大了大衍法的应用范围。当然，他由于受理学的影响，也编造了象蓍卦发微这样的题目，这是美中不足之处。从他的一些问题，还使我们了解到当时社会的一些侧面，如推库额钱反映了通货膨胀的严重程度。上面，我们还不厌其烦地重现秦九韶化约问数的原始过程，因为这是分析秦九韶大衍法实质与优劣的依据，离此本源，易生谬误之论。以上是本节讨论的目的。

三、几点注记

1. 秦九韶在将问数分类时，引进了“格”的概念。所谓元数格、通数格、收数格和复数格，无非都是一些算法，由于每一种算法都为达到一定目的而设，它们类似于现代计算理论中的子程序，在使用时叙述起来很方便。如对属于元数类的问数，先以“元数格入之”，若“诸数皆不可尽类，则以诸元数命曰复数，以复数格入之”。前面已经指出，秦九韶特别强调在一定条件下，所有元数、收数、通数三格，皆有复乘求定之理，悉可人之。我们认为这反映秦九韶研究算法有很精深的造诣。

2. 秦九韶在化约问数时，先给每个数一个代号。如积尺寻源

题有八个问数，秦九韶“假八音为号位”：金、石、丝、竹、匏、土、革、木。所谓“号位”，即是有序的存数的单元。在每个号位上都置有数字，运算则在各“号位”之间进行，“号位”上所置的数字可依中间运算结果而变化。这种“号位”很类似于计算机中的存储单元，适于机械化的运算。

3. 过去一些分析“大衍法”的文章，经常提到这样的看法：秦九韶由于没有素数和素因子分解的概念，致使他的方法烦杂、易错。从理论完美的角度看，使用了素数与素因子分解概念，可使方法的叙述比较漂亮、简捷；但从算法角度来看却不然。首先，化约模数时，素数与素因子分解概念并不是必需的；进而，即使引入这些概念，在具体将一个数分解成素因子的积时，还需要一套可行的算法，这种算法的复杂程度至少不亚于判断一数是否为素数的算法。而秦九韶化约模数的算法，主要是辗转相除法。因此，从算法上看，秦九韶的方法更简便易行。

参考文献

〔1〕钱宝琮：“秦九韶《数书九章》研究”。《宋元数学史论文集》60—103页。科学出版社，1966。

〔2〕李文林、袁向东：“中国古代不定分析若干问题探讨”。《科技史文集》第8辑，上海科技出版社。1982。

〔3〕U. Libbrecht: 《Chinese Mathematics in the thirteenth Century. the Shu-Shu Chiu-Chang of Ch'in Chiu-Shao》. MIT. 1973.

〔4〕李文林、袁向东：“论汉历上元积年的计算”。《科技史文集》第3辑，上海科学技术出版社，1980。

〔5〕钱宝琮：“求一术源流考”，《学艺》第3卷第4号。

〔6〕宋景昌：《数书九章札记》。商务印书馆，1937。

秦九韶大衍求一术的新研究

莫 绍 揆

秦九韶大衍求一术是我国数学史上一项伟大成就。这是解一元一次同余方程组的问题，起源于《孙子算经》"物不知数"算题。在《孙子算经》里，各模数是两两互素的，《孙子算经》给出相应于各模数的"用数"，从而解决了这个问题。秦九韶把这个问题推广到模数非两两互素的一般情况，就两两互素情况给出如何求用数的机械方法。因此和《孙子算经》相比较，秦九韶把问题的范围推广到模数非两两互素的情况，而且解法比较深入(已有求用数的一般方法)，此外秦氏的研究及其结果，可以在数论上得到更广泛的应用。无论从什么意义上说，秦氏的结果都非常有意义，值得重视。可惜得很，秦氏的大衍求一术直到如今还没有正确而合理的解释，他的理论本质上不无漏洞，很难说是正确而完善无缺的解法，从而也就得不到人们应有的评价。现在我们想对秦氏的理论给出一个全面的、系统的解释，并给出一个全面的、正确的、恰如其分的评价，庶不埋没古人的成就。

还应指出一点，秦氏只使用等数概念完全没有使用素数概念，因此整个大衍求一术理论可适用于只有最大公因数概念(无素数概念)的更广泛的整数环论中，例如从复乘求定之理可得：(在更广泛的整数环内)任给a_1，a_2，…，a_n，恒可找到b_1，b_2，…，b_k使得诸b_i两两互素而诸a均可分解为诸b之积(可有重复)。这结果可叫做(上述广义环的)基本定理，和自然数论中算术基本定理有同样的重要性。对此我们不拟多谈，我们只限于详细而有系统地给出秦九韶大衍求一术理论的真正解释。

大衍求一术理论的本质内容

大衍求一术处理的问题是：求下列方程组

$$x\equiv r_i \pmod{a_i} \quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

的解。这里a_i叫做第i个模数(秦氏叫做问数)，r_i叫做第i个余(剩余)。

如诸a_i两两互素可叫做标准情况，如诸a_i未必两两互素，须先设法化为两两互素。对此，秦氏分成两步：首先，由诸a_i选取其因子b_i，使得$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$(指最小公倍数)等于$b_1, b_2, \cdots, b_n$，这些b_i可以叫做第i个准定数(秦氏并未给以专名)；其次，再把准定数化为两两互素的定数。

要求诸b_i须先参考由诸a_i而求其最小公倍数的方法。对此《九章算术·少广章》中已有极明晰而机械的方法(参见〔1〕)，如把诸a_i按其足码大小而定先后，少广术可以说是：

"两两连环求等，约后不约前。"

即对每对a_i，a_j均求其等数(a_i, a_j)，用这等数约a_j(当$j>i$时)而不约a_i("约后不约前")，而且必须按下列次序求等：a_1依次与$a_2, a_3, \cdots, a_n$求等(一变)；其次，a_2依次与$a_3, a_4, \cdots, a_n$求等(二变)；再次，a_3依次与$a_4, a_5, \cdots, a_n$求等(三变)；最后a_{n-1}与a_n求等($n-1$变)。这种次序规定应包括在"两两连环求等"这句话之内作为其固有内容，直到第$n-1$变做完以后，诸a_i便变成所求的准定数b_i了。

这个方法是完全正确的，但秦九韶为了使得尽量多的b_i能够两两互素起见，特把这步骤分成两步，第一步约奇(即约后两数互素)，第二步约偶(即约后两数不互素)，规定约奇必须先于约偶(如果a_1，a_2为约偶，而a_1，a_3为约奇，则把a_1，a_2这步"姑置之"，先作a_1，a_3)待本变内一切约奇均作完后，再回头做留下来的约偶步骤。秦氏原文如下(所谓"元数"格，以后再讨论)：

第一步约奇约偶。

"元数者，先以两两连环求等，约奇弗约偶。(或约得五而彼有十，乃约偶而弗约奇。)或元数俱偶，约毕可存一位见偶，或皆约而犹有类数存，姑置之，俟与其他约遍而后乃与姑置者求等约之，或诸数皆不可尽类，则以诸之数命曰复数，以复数格入之"。

在约奇时如约较小足码者便叫做反约(见第八问积尺寻源约偶时必不能反约)。我们必须指出，如果已进行一步约偶，则今后(在本变内)绝不能再反约(即使该反约是约奇)，否则将会导致错误。例如，设$(a_1, a_2, a_3)=(54, 24, 14)$，如在第一变中对$(a_1, a_2)$约偶得(54, 4, 14)，对$(a_1, a_3)$反约(因约奇)得(27, 4, 14)，再作二变得(27, 4, 7)，但正确答案都是(27, 8, 7)。注意，对(a_1, a_3)约偶时已把2的最高方幂由2^3约为2^2，继以反约时又把54的因子2约去，二变中又把14的2因子约去，结果便无法保留最小公倍中的因子2^3了。故秦氏规定：约奇必先于全部约偶。

得到准定数后，便调整因子使两两互素，秦氏定有方法，"如诸数皆不可尽类("尽类"即"互素")，则以诸元数命曰复数，以复数格入之"。这里"复数"及"复数格"疑有误文，因与秦氏正文所说的"复数"及"复数格"了不相关(后文还将讨论)。窃疑应作"复乘"、"复乘格"(即"数"字改为"乘"字)。这里的"复乘格"即下文的"复乘求定之理"(以前人们误把这段话作为复数格的内容，这是错误的，这一段话与"复数格"了不相关)。这便是第二步。

第二步复乘、求定。"两两连环求等，约奇弗约偶复乘偶，或约偶弗(原误为"或")约奇复乘奇。如(原误为"或")彼此可约而犹有类数存者，又相减以求续等，以续等约彼则必复乘此乃得定数。所有元数、收数、通数三格，皆有复乘求定之理，悉可入之。求定数勿使两位见偶，勿使见一太多。见一多则借用繁，不欲借则任得一"。

这一步是复乘求定，即调整各准定数的因子，使乘积不变但却两两互素，两两互素的准定数便叫做定数。秦氏所说的"求定数勿使两位见偶"便是此意。

复数求定之理便是(由于前一步骤一般是约后不约前)：用新的a_i，a_j的等数约a_i同时乘a_j，即用等数约前而乘后。如果结果两数互素则可终止而对下一对数进行，如果结果两数仍不互素，再将所得的两结果求其等数，继续约前而乘后，直到两数互素为止(然后对下一对数进行)。就"两两连环求等"而言，第一第二两步是一样的，但在前一步则约后不约前(除非约奇情况下可以反约)，且约一次即停。在这一步，则约前而乘后，继续到两数互素才止。

当"两两连环求等"作完以后，便得定数。

"所有元数收数通数三格，皆有复乘求定之理"。这是因为收数通数两格皆先化为元数格(见后文讨论)的缘故，并非有什么特殊原因。

我们强调，每一对问数都须作这两步：第一，约奇约偶，以等数约后不约前(除非约奇情况可以反约)，第二，复乘求定，以等数约前且乘后，重复作到两数互素为止。缺少任何一步，都不正确，都会导致错误。以前人们都没有注意到这一点，所以把秦氏理论弄错了，甚至于说秦氏理论有毛病(见[6])，其实是后人自己的错误，与秦氏理论无关。

第三步，求乘率。秦氏接着说，

"以定相乘为衍母，以各定约衍母，各得衍数(或列各定为母于右行，各立天元一为子于左行，以母互乘子亦得衍数)。诸衍数各满定母去之，不满曰奇。以奇与定，用大衍求一人之以求乘率(或奇得一者便为乘率)。"

设原问数(模数)为a_i，准定数为b_i，用复乘求定后得定数c_i，，则

衍母$M=c_1c_2\cdots c_n(=b_1b_2\cdots b_n=$诸$a_i$之最小公倍数)。

衍数$m_i = M/c_i = c_1c_2\cdots c_{i-1}c_{i+1}\cdots c_n$

奇　$p_i = rs(m_i, c_i)$(即m_i除以c_i的剩余)。

然后用c_i与p_i按大衍求一术求得乘率k_i，k_i应满足条件，$k_ip_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, c_i)$或$k_im_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, c_i)$如果$p_i$与$c_i$较小，是可以用尝试的方法找到(《孙子算经》中的70，21，15便是用尝试法)。但是秦氏的贡献在于：他给出了找乘率k_i的机械方法。这方法便叫做大衍求一术。

"大衍求一术云：置奇右上，定居右下，立天元一于左上。先以右上除右下，所得商数与左上一相生入左下，然后乃以右行上下，以少除多，递互除之，所得商数，随即递互累乘，归左行上下。须使右上末后奇一而止，乃验左上所得，以为乘率。或奇数已见单一者便为乘率。"

对于这段话已有很正确而清楚的解释，我们不必多所论述，只用新的论述重叙其结果如下：

设命奇数p_i为p，定数c_i为c。为一致起见，记c为r_1，p为r_2。一般，用r_{k+1}除r_k得商q_{k+1}及剩余r_{k+2}。即

$$r_{k+1} = r_k \cdot q_{k+1} + r_{k+2}$$

在左边取$e_1 = 0$，$e_2 = 1$，每得商q_{k+1}时即作

$$e_{k+2} = e_{k+1} \cdot q_{k+1} + e_k$$

继续作下去，当$r_{2k} = 1$(足码必须为偶，即必须在"右上")时，相应的e_{2k}即为所求乘率(如果r_{2k+1}先为1，则仍用r_{2k+1}除r_{2k}，得商$r_{2k}-1$而剩余为1。这时$r_{2k+2} = 1$合于要求)。

可用图式表示如下：

$$\begin{array}{ccc|ccc} \cdots\cdots e_6 & e_4 & e_2 & r_2 & r_4 & r_6\cdots\cdots \\ \cdots\cdots e_5 & e_3 & e_1 & r_1 & r_3 & r_5\cdots\cdots \end{array}$$

按辗转相除法的理论，这种过程是正确的，已有多人论证过，不必赘述。

只是秦九韶为什么说："立天元一于左上"？这个"一"指什么？钱宝琮先生开始说它代表剩余R，后来又说它"只是单位1，术文

中“天元”二字是虚设的，说它代表剩余R是不合适的”([2])钱先生还有大段话讨论这个问题，我觉得很值得商酌。这里只是说一句，这个“立天元一”和我国天元术中的“天元一”完全相同，就是代表现在的未知数的系数(亦即x的系数)，事实上，在上面的图式中，每对(e_k，r_k)都是一个一元一次方程。当足码为偶时，

(e_{2k}，r_{2k})表示$e_{2k}x\equiv r_{2k}(\mathrm{mod}\,c_i)$.

当足码为奇时，

(e_{2k+1}，r_{2k+1})表示$-e_{2k+1}x\equiv r_{2k+1}(\mathrm{mod}\,c_i)$，

由(e_1，r_1)及(e_2，r_2)出发，即是由

$$-0\cdot x\equiv c_i(\mathrm{mod}\,c_i), \tag{1}$$

$$1\cdot x\equiv p_i(\mathrm{mod}\,c_i) \tag{2}$$

出发，得到(e_{2k}，r_{2k})(注意$r_{2k}=1$)，即是得到：

$$e_{2k}\cdot x\equiv 1(\mathrm{mod}\,c_i). \tag{3}$$

由于这里的各变换都是等值变换，故方程(1)(2)(3)是同解方程，用(2)中的x代入(3)得

$$e_{2k}\cdot p_i\equiv 1(\mathrm{mod}\,c_i),$$

故e_{2k}即所求乘率k_i。

显然秦氏是从方程立论的(他的大衍求一术亦是从同余方程的变换来考虑的)，所以“立天元一”毫无疑问就是我国天元术中的天元。

求衍数时说“各立天元一为子于左行”。其中“天元一”也是我国天元术中的天元。它起源于《九章算术》少广术中的“全步”，而“全步”和开方术中的“借算”，性质和用意完全相同，演变而成后世的天元。焦循说，“李氏(冶)之立天元一，盖不知真数，立一数为比例之根，其究不必一也；秦氏之立天元一，乃欲得一数，立一数以为齐同之准，其究必是一也”(见[5])。似乎两者有别，其实“其究必是一也”，仅指必是未知数的系数1，这个“一”仍与运算中旁边的数不能相混，不能相同，故仍不是1。无论如何，由焦循的话亦可知秦氏的“立天元一”仍是未知元，不是真正的1。

关于我国天元术的起源及其发展详情，作者还有许多看法，将另文讨论。

当奇为1时，由于$1\cdot 1\equiv 1 \pmod{c_i}$，显然相应的乘率便是1，不必再求了(如照法求去，也得乘率为1)。

第四步，求用数及所求答数。

“置各乘率对乘衍数，得泛用。并泛课衍母，多一者为正用。……然后其余各乘正用为各总。并总满衍母去之，不满为所求率数。”

将乘率k_i与衍数m_i相乘，其积叫做泛用s_i，

$$s_i = k_i \cdot m_i.$$

秦氏在泛用数中特别区分出一种叫做正用，即如果

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_n = M + 1,$$

那么泛用s_i便叫做正用。如果$s_1 + s_2 + \cdots + s_n = tM + 1$而$t > 1$，则$s_i$叫做泛用。这种概念反映了秦氏对一次同余方程组的有解条件已相当了解，但这样处理问题似不妥当。提出理由如下：

第一，如果泛用数限于正数(即乘率限于正数)，那么当$0 \leqslant t < n$时，倍数t是无法改变的(尤其当诸a_i两两互素时)，即使诸a_i非两两互素，也不能保证必能选取s_i使$t=1$。另一方面，如果容许用数为负数，那么永可选取s_i使$t=0$，因此，如欲使“用数”标准化(即正用数)，应该讨论负数并规定要求$s_1 + s_2 + \cdots + s_n = 1$。如今秦氏把用数限于正数，又规定标准化条件为$t=1$，这时未必一定泛用数均可标准化，正用数的概念显然无用(事实上秦氏的第四问与第九问便不能改)。

第二，秦氏本人并未把可能标准化的都标准化，即在秦氏所举的九问中，第一第五第六三问泛用本身便是正用，无须更改，第四第九问不能改。此外，秦氏只把第二第七两问由泛用改为正用。足见正用数的概念秦氏本人也未重视。

因此，在秦氏的大衍术理论中，我们认为正用概念不是必要的，暂时不予讨论，只当下文讨论有解条件时再考虑秦氏的正用

数概念。

此外，秦氏又引入借数的概念。但他已明确说过"不欲借则任得一"，"或欲从省勿借任之为空可也"，亦即借数可有可无，并非必要部分(清代黄宗宪也主张删除，见〔4〕)。因此，我们将在讨论有解条件时再讨论借数。

这样，得了泛用后，以剩余r_i乘泛用s_i叫做总，将各总求和，再用衍母M除之，其剩余便是所求之数，即：同余方程组之解为：

$$x \equiv s_1r_1+s_2r_2+\cdots+s_nr_n \pmod M,$$

亦即 $$x=rs(s_1r_1+s_2r_2+\cdots+s_nr_n,\ M).$$

这样整个问题便得以解决。

这个解法是完全正确的，而且是一个机械的过程，即是一个算法。我们可以写成计算机的程序，下文便用通常的 Algol 60语言写出，熟悉计算机的人不难看出，其解法过程本身便是一个算法，稍加修饰便可写成程序。我们强调指出，现在一般认为秦九韶没有一个明确而合适的方法化一般模数为两两互素的定数，这种看法肯定是错误的(例如，见〔3〕)。

大衍求一术算法(用Algol 60语言)

设给出一次同余方程组$x=r_i(\mathrm{mod}\,a_i)(1\leqslant i\leqslant n)$，我们有下列算法。$(a,\ b)$指$a$，$b$的等数

```
for  i: =1     step  1  until  n  do
for  j: =i+1   step  1  until  n  do
begin d: =(a_i, a_j);
  if  (a_i, a_j/d)=1  then  a_j: =a_j/d  else
  if  (a_i/d, a_j)=1  then  a_i: =a_i/d  end  j;
```

((甲)约奇不约偶，这时可反约)。

```
for  j: =i+1  step  1  until   n  do
```

```
begin d: =(a_i, a_j); a_j: =a_j/d  end  j, i;
```

((乙)约偶，这时必约后，不能反约)。

```
for  i: =1      step  1  until  n  do
for  j: =i+1  step  1  until  n  do
  while  (a_i, a_j)>1  do
  begin  d: =(a_i, a_j); a_i: =a_i/d; a_j: =a_j*d
                              end  while, j, i;
```

(复乘求定，循环结束时，a_i为定母)。

```
M: =1; for  i: =1  step  1  until  n  do  M: =m
*a_i;
```

(M为衍母)。

```
for  i: =1  step  1  until  n  do
begin  m_i: =M/a_i   (m_i为第 i 个衍母)
p_i: =m_i;    while  p_i>a_i  do  p_i: =p_i-a_i;
                            (p_i为第i个奇数)
e_1: =0; e_2: =1; h_1: =a_i; h_2=p_i;
while  h_2>1  do
begin  if  h_1>h_2  then  h_1: =h_1-h_2; e_1: =e_1+e_2;
if  h_2>h_1  then  h_2: =h_2-h_1; e_2: =e_2+e_1  end  while;
k_i: =e_2; (k_i即第i个乘率)
s_i: =k_i×m_i  (s_i即第i个泛用数)end  i;
N: =0; for  i: =1  step  1 until  n  do
  N: =N+r_i*s_i;
  N: =rs(N, M); (N即所求答数).
```

大衍求一术理论的补充部分

秦九韶的大衍求一术还有好些补充部分，值得我们研究。尤其是在这些补充部分中，秦氏的说法不够精密，有相当多的毛病。

前人每每把这些部分和大衍求一术的中心部分混在一起，从而指责秦氏大衍求一术本身，这就使我们不得不对这些补充部分加以仔细探讨，给予全面的评价。

这些补充部分可分成两部分，第一部分是有关收数、通数与复数三格，第二部分是有关正用数与借数的。

先讨论第一部分。秦九韶把问数分成四类，也叫四格。

“大衍总数术曰，置诸问数(类名有四)，一曰元数(谓尾数见单零者，本门揲蓍酒息斛粜砌砖失米之类是也)。二曰收数(谓尾数见分厘者，假令冬至三百六十五日二十五刻，欲与甲子六十日，为一会而求积日之类)。三曰通数(谓诸数各有分子母者，本门问一会积年是也)。四曰复数(谓尾数见十或百及千以上者，本门筑堤并急足之类是也)。”

显然，元数格即问数为整数的一般情况，收数格乃问数为小数的情况，通数格乃问数为分数的情况，前者为中心理论(上文已详细论及)，后者乃其推广，至于复数格指问数为十的方幂的倍数者，这是一种非常特殊的情况值不得特别提出；即使推广为：复数格指问数有全体最大公因数者，仍不足以值得特别提出。秦氏既然提出，下文便把它作为“问数有全体最大公因数”的情况来考虑。

“收数者乃命尾位分厘作单零以进所问之数，定位讫，用元数格入之。或如意立数为母，收进分厘，以从所问，用通数格入之。”

换句话说，当问数为小数时，可用最低小数位作单位，把问数化成整数后，归入元数格。或任意选取单位，把问数化成分数后，入通数格(最后仍化为元数格)。这样的化归显然正确，我们不再讨论。

在论通数格前，先论复数格。

“复数者，问数尾位见十以上者，以诸数求总等，存一位约众位，始得元数。”

上面说过，照字面而论，复数格指问数为十的方幂的倍数

者，推广之，复数格指问数有全体最大公约数者，即其总等非一者。在这样情形之下，原文所说的"术总等，存一位约众位，始得元数(指入元数格)"是不正确的，其正确的作法有二。

第一，或者直接入元数格，即不管总等是否为一，均照元数格计算，这时复数格可以取消，因为方法既然一样，自无分出复数格的必要。

第二，或者用总等遍约各数，约后所得之数入元数格，求得准定数后，复乘求定之前用总等任乘一数再作复乘求定。再明白说来，设a_1，a_2，…，a_n为复数格，其总等为d。则用d遍约得a_1'，a_2'，…，a_n'。对诸a_i'实行第一步得准定数b_1，b_2，…，b_n后，任用d乘其一(设乘b_1)，对db_1，b_2，…，b_n实行复乘求定，所得即为定数。

秦氏既特列复数格，只能采用后一办法。因此对秦氏的"存一位约众位"须理解为："其后在第一步约奇约偶中总等不参与运算"，即约奇约偶时的"两两求等"是不计总等因子的，到复乘术定阶段的"两两求等"才计及总等因子。

当然，如果"存一位约众位"的结果，各问数的素因子中最高方幂没有降低，那么可不受上述限制而照原样使用元数格。

今就含有复数格的五个例子探讨如下：

第二问古历会积，原问数为

$$365\frac{1}{4},\quad 29\frac{499}{940},\quad 60,$$

去分母得　　1373340，111036，2256000。

有总等12(故为复数格)，12的素因子为2，3，三者的因子为12·487·235，12·487·19，12·235·240.其中240与12有公因子，如存最后一位，则2,3的最高方幂不会降低而可直接使用元数格。秦氏这样做了，从而避免使用上述约定。如存另一数不约，必须使用上述约定。

第三问推计土功。原问数为

54，57，75，72

有总等3。而54中3的方幂最高，如存54不约，则素因子3的方幂不降低，可直接使用元数格。秦氏这样做了，从而又避免使用上述约定。但秦氏之所以不约54，说是“以约三位多者不约其少者”，即以问数的大小为标准，这是不对的。只有以素因数最高方幂未曾降低来鉴别，才有可能直接使用元数格。

第六问程行计地，原问数为

300，240，180

有总等60，三数可分解为：5·60，4·60，3·60，无论存何位不约，均使素因子的最高方幂降低（如存第一数，则2，3的最高方幂降低，如存第二数，则3，5的最高方幂降低，如存第三数则2，5的最高方幂降低），都不能直接使用元数法。只因用总等遍约后，5，4，3三数两两互素，故第一步（约奇约偶）结果不变，从而可以马上实施复乘求定步骤。秦氏这样做，即“存一位约众位”后，马上继以复乘求定。但他用“约奇不约偶”作理由，这是完全错误的（如果“约奇不约偶”指的是复乘求定，那末整个大衍求一术便是错误的了）。足见秦氏并不知道须补充上述约定，只是碰巧这里可以直接复乘求定而不出现错误罢了。

第七问程行相及，原问数为

300，250，200

有总等50，三数可分解为：6·50，5·50，4·50，无论存何数，都会使素因子的最高方幂有所降低（如存第一数，则2，5的最高方幂降低，如存第二数，则2的最高方幂降低，如存第三数，则5的最高方幂降低），故不能直接入元数格。又因6，5，4并非两两互素，所以不能直接复乘求定。秦氏不明白这个道理，仍象前例一样直接复乘求定，以致得出错误结果（秦氏得定数为3，125，16，其实应该是3，125，8）。

第八问积尺寻源，原问数为

130，120，110，100，60，50，25，20

有总等5，秦氏并不约，直接入元数格，这是对的，但与秦氏所说“存一位约众位”不合。这里不用复数格直接入元数格反是最好的方法。

“通数者，置问数，通分内子，互乘之皆曰通数。求总等不约一位约众位、得各元法数，用元数格入之；或诸母数繁，就分从省通之者，皆不用元，各母仍求总等，存一位约众位，亦各得元法数，亦用元数格入之”。

所谓通数格，指问数为分数者，当其为带分数时，“通分内子”化成假分数；“互乘之”，指轮流以各分母乘，亦即将分母之积乘之（秦氏未用各分母的最小公倍数乘），化成整数，“皆曰通数”。因为不乘以分母的最小公倍，一般说来各通数之间有总等（即入复数格），故求总等存一位约众位始入元数格。后面一句话说得不够清楚，如果各数的分母“繁”（似指有大的总等），则可对各分母求总等存一位约众位（这似指求分母的最小公倍数），然后按上法互乘之，这时相当于用分母的最小公倍数乘，如果原来分子间无总等，则所得各通数亦无总等，故直接入元数格。

要者，收数格通数格是适用范围的扩大，复数格是就一特例而提出的新方法，原文所述皆有不够清楚不够完美的地方，但基本上是正确的。

再说第二部分，有关正用数与借数概念。

我们知道，当问数（即模数）a_i，a_j有等数d_{ij}时，相应的剩余r_i，r_j必须满足条件。

$$r_i-r_j\text{为}d_{ij}\text{的倍数，}\qquad (*)$$

同余方程组才能有解。而同余方程组有解的必要充分条件是条件（*）对一切i，$j(1\leqslant i,\ j\leqslant n)$均成立。秦氏既把同余方程组推广到各模数未必两两互素的情况，似乎应该详细讨论有解条件才算完整，否则理论不算完整。但是中国古代的讨论均假定有解而求其值，并没有讨论任给剩余r_i时，方程组是否有解。因此古人不讨论有解条件，似不应过于责备。此外，秦氏的确知道上述条件

(*)的存在，他还利用条件(*)而把泛用数减少以得正用数，又对无用数情况添入借数。

“并泛课衍母，多一者为正用；或泛母多衍母倍数者，验元数奇偶同类者，损其半倍（或三处同类，以三约衍母，于三处损之）各为正用数。”

所谓“奇偶同类”，应指“同为偶”（“同为奇”不能用），亦即有公因子2。设a_i与a_j同为偶，则可将s_i，s_j代以

$$s_i-\frac{M}{2},\quad s_j-\frac{M}{2}.$$

这时整个泛用数之和减少了M，而所求解答亦可用新泛用数求得。因为用原泛用数将为

$$r_is_i+r_js_j+(\text{其余各项}),$$

而用新泛用数将为（省略“其余各项”不写）

$$r_i\left(s_i-\frac{M}{2}\right)+r_j\left(s_j-\frac{M}{2}\right)$$

$$=r_is_i+r_js_j-r_iM+(r_i-r_j)\frac{M}{2}.$$

因为r_i-r_j必为2的倍数，可见新旧之和相差为M的倍数，而所求数不变。

如果多处同类（有公因子），比如在a_i，a_j，a_l三处同有因子d，秦九韶则认为可把s_i，s_j，s_l换为

$$s_i-\frac{M}{3},\quad s_j-\frac{M}{3},\quad s_l-\frac{M}{3}.$$

这种说法不对，因为d是否为3并未说明，既未肯定这三数有因子3，也未肯定别的问数必有因子3，则M是否为3的倍数也成问题，这种替代是不合法的。所以这里必须指明“或三处同类有因子3”，一般“当m处有因子m”时，则可把相应的m个泛用数减少$\frac{M}{m}$。

但这样，用处太少了。更好的办法应该是：设有m个问数有因子d，可选取整数h_1，h_2，…，h_m使得其和为hd，则可将s_{i1}，s_{i2}，

…，s_{im}换为

$$s_{i1}-h_1\frac{M}{d},\ s_{i2}-h_2\frac{M}{d},\ \cdots,\ s_{im}-h_m\frac{M}{d}.$$

而泛用数之和可减少h_m，而仍可按新泛用数而求得解答。

如泛用数限定为正，则所选的h_i还须使得$s_{ii}-h_i\frac{M}{d}$为正，如不能满足这个条件，则泛用数仍不能减少。

事实上，如允许泛用数可负，则永可要求泛用数之和为1（不必为衍母加1）。如要求泛用数必正，则泛用数未必可以减少。故把泛用数减少之法并没有什么用处。

再说借用数。当某定数为1时，则相应的奇数必为0（秦氏则用1），从而相应的泛用数为0（秦氏有时则以M为泛用数），这叫"无用数"。

"或定母得一而衍数同衍母者为无用数。当验元数同类者而正用至多处借之。以元数两位求等，以等约衍母为借数，以借数损有以益其无为正用。或数处无者，如意立数为母，约衍母，所得以如意子乘之，均借补之，或欲从省勿借，任之为空可也。"

即是说，如果a_i的定数为1，而a_i与a_j有等数d（这时$s_i=0$），如果$a_j>\frac{M}{d}$，则可将s_i，s_j换为

$$0+\frac{M}{d},\quad s_j-\frac{M}{d}$$

这种作法是正确的。

如有多处用数为0，秦氏认为可以"如意立数为母，约衍母，所得以如意子乘之，均借补之。"照字面而论，则是任取l（当然取为M的因子），求$\frac{M}{l}$，再以任意子乘之作为借数。即是：设s_1，s_2，s_3三处为0，而s_4为另一泛用数，则将这四用数分别换为

$$h_1\frac{M}{l},\ h_2\frac{M}{l},\ h_3\frac{M}{l},\ s_4-(h_1+h_2+h_3)\frac{M}{l}.$$

如果l不是$(a_1,\ a_4)$，$(a_2,\ a_4)$，$(a_3,\ a_4)$的因子，这样作法显然有误，而秦氏的论述也欠明晰。

其实，即使多处用数为0，仍可用上法逐个借用。秦氏的论述是想对多处用数为0时有一简法，使之全部借出，但必须还有额外条件。

今设a_1，a_2，a_3有总等l，而其中任一均与a_4有等数$\frac{l}{h}$。则可任取$h_1+h_2+h_3=h$。由s_4借$\frac{hM}{l}$给s_1，再由s_1借$(h_2+h_3)\frac{M}{l}$给s_2，由s_2借$h_3\frac{M}{l}$给s_3。结果s_4变成原用数减去$\frac{hM}{l}$，而s_1, s_2, s_3分别由0增成$\frac{h_1M}{l}$，$\frac{h_2M}{l}$，$\frac{h_3M}{l}$。与秦氏所论相符合。但此时必须有条件$(a_1, a_2, a_3)=l$，使$(a_1, a_4)=\frac{l}{h}$成立。

当用数为0时，计算每每简便不少，而借数则大可不必。秦氏强调借用(以及强调减少泛为正用)，足以表明秦氏对方程组有解条件的充分认识。虽然改为正用、借用以后，对任给的剩余并不合用，但对有解的方程组却都合用。何故？是由于存在有解条件(*)的缘故！以往人们只知责怪秦氏不应会简就繁放弃用数0而不用，其实这是不明秦氏的真意所在。可惜的是，秦氏对借数仅限于用数为0处，其实只要a_i，a_j有等数(非1)处则都可借用，秦氏未曾明说，未免有失一般性。

大衍求一术九问的探讨

秦九韶对大衍求一术除给出总法外，还列有九问，这些问题可以更具体地反映出秦氏大衍求一术的真相，但它本身还有一些错误，须作详细探讨给予订正。可是前人似未系统地做过这方面工作，所以现在逐条研讨这九问。

第一问蓍卦发微

秦氏以1，2，3，4为原问数，各数"互乘"得衍数24，12，8，6，其和为50，以此说明"大衍之数五十。"求定数得1，1，3，4，其用数本应为12，12，4，9。秦氏将第二用数乘以2（原问数本

身），故得12，24，4，9为用数，其和为49，用以说明"其用四十有九。"至于卦蓍，所用之蓍草数用大衍求一术以求后，将变成该蓍数除以12的剩余，以该剩余除以衍法3，所得"大商数"（"大商数"所指，例如$\frac{7}{3}=\frac{8}{3}=\frac{9}{3}=3$，即，若被除数非三的倍数时，增成最近而较大的三的倍数，再以三除之商）不外是1，2，3，4。使之对应于老阳、少阴、少阳、老阴，从而建立卦爻。

对此，给出下列评议：

第一，秦氏的这种说法并非自古相传，纯属新创。但我们不能批评他"违背古意"，而秦氏也未有表示这是古昔相传的说法。

第二，求定数之前，先从原问数而求衍数，这与大衍求一术立意相背，显然不足取。故用大衍求一术极难解释"大衍之数五十"一语。

第三，当定数为1时，相应用数或为衍母，或为0。从简易与否而立论，则取为0较宜，无论如何，绝不应该用衍母的倍数。今定数为1，1，3，4，用数应取0，0，4，9，或勉强可用12，12，4，9。今乃取12，24，4，9，此则是大衍求一术所不能容忍者。因此，用大衍求一术亦极难解释"其用四十有九"一语。

第四，如果从所用蓍草数配合大衍求一术，计算过程中或计算结果出现一些新数据，按此新数据而立卦，那么用大衍求一术解释蓍卦则未为不可。今秦氏乃用大衍求一术以求所用蓍草数，此数在揲一时早已知之，从揲二或揲三或揲四时亦可知之，无须使用大衍求一术。运用大衍求一术过程中，所出现的新数据亦毫无用处。如依秦氏所说，整个蓍卦过程不外是：将蓍草数除以12，其剩余再除以3，依据所得"大商数"1，2，3，4而判为老阳、少阴、少阳、老阴，这种过程与大衍求一术何干？

因此，秦氏之说不但于古无据，而且本身也极难自圆其说。

另外，本问所得之用数（如用0，0，4，9）恰为正用数，其中有两个无用数，但秦氏并未讨论借用数（反而使用毫无根据的12，24，4，9）。

第二问古历会积

原问数为$365\frac{1}{4}$，$29\frac{499}{940}$，60(以日为单位)，去分母(以4×940乘)得问数为

$$1373340,\ 111036,\ 225600.$$

有总等12，存第三数不约(2，3的最高方幂不降低)，入元数格，得

$$487,\quad 19,\ 225600.$$

衍母为2087476800，这是以一日的$\frac{1}{4\times 940}$(姑且叫做一小分)为单位，如以4×940除之，得会积日；如以111036除之，得会积月；如以1373340除之，得会积年。这是非常清楚的。但秦氏却误用等数12除，再以所得之数去除，以致会积日、会积月、会积年均增大12倍。这是秦氏无意中错误，与大衍术无关。

其次，衍母及各用数既以小分为单位，则朔余、气余等也应如此，不应以日为单位。也即气不及不应是"4"而应是$4\times 4\times 940$，朔不及不应是"8"而应是$8\times 4\times 940$。秦氏在这里犯一错误，所求得之数毫无意义。

另外，所求用数之和不是衍母加1而是衍母的2倍加1，所以所得用数不是正用数而是泛用数。由于各元数均有因子2(因有总等12)，故任在两用数中减去$\frac{M}{2}$即得正用数。秦氏说：

"按术，验法元图内诸元数奇偶同类者各损其半。今验法元图，(约去总等后的)气元尾数是五，纪元尾数是六百，为俱五同类。乃以衍母……折半，……以损泛用图内气泛纪泛毕，其朔泛不损，各得气朔纪正用数。"

其实，只须在去分母所得的问数中，找两个问数有公因子2即可，不必在约去总等后的问数中找(很可能，约去总等后已无公因子)。如今找来找去，各问数只有公因子"5"而无公因子2，那么应从两个相应泛用数分别减去$\frac{h}{5}M$、$\frac{k}{5}M(h+k=5)$，而不是各减$\frac{M}{2}$。秦氏各减去$\frac{M}{2}$虽无错误，但所论述之根据却有弊病。

第三问推计土功

原问数为

54，57，75，72(以丈为单位)。

有总等3，秦氏存54而约其余三数，3的最高方幂不降低，可入元数格。先约奇约偶后，再继以复乘求定，这些都正确无误（如存别的数，则入元数格时，在复乘求定之前总等不参与运算）。所得用数之和为衍母的2倍加1，但秦氏未改为正用，足见正用数概念可免。

还可指出，本问各剩余0，0，51，8均为3的倍数，因此，本问可不以“丈”无妨以“3丈”为单位，问数改为18，19，25，24，而剩余改用0，0，17，6。其结果亦合而不必使用复数格(如有一剩余非总等之倍数，则不宜以总等为新单位)。

第四问推库额钱

原问数为

(甲)12，(乙)11，(丙)10，(丁)9，(戊)8，(己)7，(庚)6。

总等为1，故为元数格。秦氏原作法基本正确。求得甲庚定数为1，相应用数为0，按秦氏所说，甲庚须借用数，由于“用一十二庚六皆与丙一十戊八俱偶，为同类”，故甲庚可由丙戊借之，但戊用数太少，则应由丙用数借出。这是正确的。由于(甲，丙，庚)=2，故应由丙借出$\frac{M}{2}$。这也正确。再将$\frac{M}{2}$以原等数2约之得$\frac{M}{4}$，即作为甲与庚之用数。这却不正确。甲、庚之间等数非4，决不能有借数$\frac{M}{4}$，秦氏也知此借数不合用，说“今不欲甲庚之借数同”。这个理由站不住脚。(第八问中竹土借数同，为何又不修改？)秦氏乃考虑$\frac{M}{2}$有因子3，故取$\frac{M}{2}$的三分之一作为甲借数，取$\frac{M}{2}$的三分之二作为庚借数。这种借数是对的，其原因是：并不因为$\frac{M}{2}$有因子3$\left(\text{其实}\frac{M}{2}\text{也有因子2，秦氏未用它}\right)$，而是因为甲、庚之间有等数6，而甲、丙之间有等数2，故由丙借$\frac{M}{2}$给甲，由甲借$\frac{2M}{6}$给庚$\left(\text{留下}\frac{M}{6}\right)$。从而得“甲$\frac{M}{6}$，庚$\frac{2M}{6}$，丙(减少)$\frac{M}{2}$”作为新

用数，符合要求。而秦氏的论据却错了。

第五问分粜推原

算法与答案均正确(所得用数即是正用数，无须订正)。

第六问程行计地

原问数为

(甲)300，(乙)240，丙(180)。

有总等60。存甲不约，得(甲)300，(乙)4，(丙)3。此时2、3的方幂均降低(存任一数，均使得素因子方幂降低)，所以不能直接入元数格，必须在约奇约偶时规定总等不参与运算。但秦氏并未如此规定，而说

“先以丙乙求等，得一，不约；次以丙甲求等得三。于术约奇不约偶，盖以等三约三，因得一为奇，虑无衍数，乃使径先约甲三百为一百，复以等三乘丙三为九，既丙九为奇甲百为偶，此即是约奇弗约偶。……”

“以丙甲求等得三”，用以约甲或丙，此即元数格之约奇约偶，但是，由于素因子方幂已降低，约奇约偶时总等不参与运算，除去总等后，甲丙求等得一，故不约。此乃正确的算法，但，并非“约奇不约偶，虑无衍数……”所致，秦氏此说似不正确。

事实上，除去总等不使参与运算外，甲乙丙两两互素，故约奇约偶阶段结果不变，从而与直接入复数格无异。但总不能因此便认为：当“存一位约众位”导致素因子方幂降低时，可以跳过约奇约偶，直接复乘求定。这种作法是错误的。

本问所求之用数即正用数。答案也正确。

第七问行程相及(其中有关大衍术部分)

原问数为

(甲)300，(乙)250，(丙)200。

有总等50。存乙而约其余二数，得(甲)6，(乙)250，(丙)4。此时素因子方幂已降低，秦氏由前问作法误以为可以直接进入复乘求定(不必进行除去总等的约奇约偶)，从而求得定数为

(甲)3，　　(乙)125，　　(丙)16(其实应(丙)8)。

衍母为6000(应为3000)。这都是错误的。然后秦氏按三个余数均为0进行计算，照理答案应为衍母，即6000里。但秦氏却无理由地"便以乙丙二人约六千里，得三千里为彼去此里数"，也即当三个余数均为0时，却以$\frac{M}{2}$为答案。这是不对的。错误原因在于秦氏所得衍母有误，多了一倍。故须无理由地除以2，才符合要求。

由以上两问可以看出，秦氏对"除去总等的约奇约偶"似无认识，以致对复数格的处理易犯错误。

即使本问题文亦很有疑问，今将题文摘录并分析如下：

"问有急足三名，甲日行三百里，乙日行二百五十里，丙日行二百里，先差丙往他处下文字，既两日，又有文字遣乙追付，已半日，复有文字续令甲赶付乙，三人偶不相及，乃同时俱至彼所。……，次欲知彼处去此里数各几何。"

从字面看来，甲在乙半日之后启行，可知二日半之后甲追及乙。乙在丙两日之后启行，故八日乙追及丙，乙启行之后三日(甲启行之后两日半，即丙启行之后五日)甲追及乙。因此，丙启行五日之后甲永在乙前，丙启行十日之后乙又在丙前。即丙启行十日之后，甲永快于乙，乙永快于丙，决无"同时到达"之理。为了符合答案起见，钱宝琮先生解释为："当是说三人各至彼处的时刻皆与各起程的时刻相同"。并评议说："因此，问题的这一部分与《张邱建算经》卷上第十二题类型相同，只须求出三个日行里数的最小公倍数，就是'彼处去此里数'，也不应用大衍求一术来解决。"

秦九韶原来解法为："视甲及乙里为乙率，视乙及丙里为丙率，以乙日行满去乙率，不满为乙余，以丙日行满去丙率，不满为丙余。以二余各乘本用，并之为总，满衍去之，不满为彼去此里数。"

设甲日行a里，乙日行b里，丙日行c里，乙先甲d日启行，丙先乙e日启行。则

甲及乙里数$=\frac{d\cdot b}{a-b}\times a$　记为B，

甲及乙里数$=\frac{d\cdot b}{a-b}\times a$　记为B，

乙及丙里数$=\frac{e\cdot c}{b-c}\times b$　记为C。

秦氏之意为，取　$rs(B,\ b)$为乙余，$rs(C,c)$为丙余，即解下列方程组：

$x\equiv 0 \pmod a$，$x\equiv$乙余$\pmod b$，$x\equiv$丙余$\pmod c$。

只是偶然因为乙余与丙余均为0，才能使得问题变成求a、b、c的最小公倍数。

但是，如何订正本问题文使之符合秦氏原意，今尚不知，所以值得继续探讨。

第八问积尺寻源

原问数为

(金)130，(石)120，(丝)110，(竹)100，(匏)60，(土)50，(革)25，(木)20。有总等5。秦氏并不"存一位约众位"，而直接进入元数格。这是正确的(事实上，最简便的方法是不管复数格，一律用元数格求之)。但这却与秦氏全书的精神(复数格使用特别方法)不相符合。

约奇阶段便已遍约，故约偶及复乘阶段可省。此问秦氏写得最详细，只限于使用约奇，未免不够一般。

求得的用数总和为衍母两倍加1，但秦氏没有化为正用数，足见正用数并非必要。

求得定母后，竹土木之定数为1，而相应用数为0，须借用数。秦氏是按下法计算：

革25与木20之等数为5；故从革用数内借$\frac{M}{5}$给木。这是对的。又竹100与土50之等数为50，故从革内各借$\frac{M}{50}$给竹与土。本来这也是正确的，但秦氏未说理由。其实应该说：革与竹等数为25，故又从竹借$\frac{M}{50}$给土，结果则等于从革各借$\frac{M}{50}$给竹与土。因此，秦

氏所得之借数正确无误。

第九问余米推数

原问数为

19，17，12。

问数两两互素，属于最简单情况，计算正确。

综上所说，可见《数书九章》有关大衍术的九问，正确的地方固然很多，但错误而且是没有理由的错误（如第二问错用单位）也复不少。这些错误很难说是秦氏本人的，很可能是由助手抄写错误而秦氏未加细校，也可能是辗转传抄之误。无论如何，这些失误固应校正，但不能因而指责秦氏大衍求一术本身。

另外，还有一问，即卷三治历演纪，秦氏把一个大衍求一术的问题改用别的方法计算，它既体现了一题多解，又表明了秦氏对大衍求一术的熟悉（可以用别的方法解大衍求一术问题），但因此问解法与大衍求一术无关，这里暂不赘述。

参 考 文 献

〔1〕莫绍揆，假如没有素数概念该怎么办？《数学研究与评论》第2卷（1982年）4期，183—187页。

〔2〕钱宝琮，秦九韶数书九章研究，《宋元数学史论文集》，60—103页。

〔3〕李文林、袁向东，中国古代不定分析若干问题探讨，《科技史文集》，第八辑，106—122页。

〔4〕黄宗宪，《求一术通解》二卷。

〔5〕焦循，《天元一释》。

〔6〕U. Libbrecht, Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, the Shu-Shu Chiu-Chang of Ch'in Chiu-Shao (MIT.1973).

从"演纪之法"与"大衍总数术"看秦九韶在算法上的成就

李　继　闵

演纪之法与大衍总数术是《数书九章》中记叙的我国古代历法中推算上元积年的两种重要方法。

自汉代以后，我国历法追求理想上元，因而推算历元所归结的数学问题更加复杂，一般相当于求解多个一次同余式的组。①对于这类有相当难度的问题，它的求解不仅需要以深刻的数学原理为指导，而且需要有精巧的算法设计来保证运算简捷、准确地完成。秦九韶在这方面的创造表现了很高的技巧与水平。

（一）

研究中算家的算法，不能离开中国传统数学的特点和历史条件。

我国古算是筹算。一切运算都是用算筹在平面上布式来进行的。它和今天的笔算以及电子计算机的算法相比，有许多不同之处。可以列举以下主要几点：

（1）在筹算中直接用来进行运算的数只能是整数。②正整数用红色筹表示（"正算赤"），负整数用黑色筹表示（"负算黑"），零

① 据说祖冲之《大明历》上元积年的推算相当于要求解十个一次同余式。（参见〔1〕、〔2〕）

② 筹，最初是作为一般事物的对应物出现的，它自然表示基数，即事物的个数。

用"空位"表示；而且普遍采用十进位置制记数法。因此，凡遇到分数计算，总是运用比率理论将分子、分母拆开，分别归结为"法"与"实"（它们是整数）来计算。所以，古代数学典籍中解题"术"文，常常叙述为："以……为实；以……为法。实如法而一。"①

（2）演算一般需要列成某种固定"筹式"来进行。筹算无运算符号和关系符号②，各筹码之间的运算或大小关系等，只能用彼此间的相对位置关系来表示③；同类数学问题的相关数量排成固定"模式"。这种筹算模式化的特征，早在《九章算术》的列衰、盈朒、"方程"、开方诸式中已有了充分出色的表现。

（3）筹算的另一个特征，是要求算法的程序化。筹算不保留演算的中间过程，整个运算表现为筹式的一系列变换。为了使全部计算首尾连贯、有条不紊地进行到底，必须对每种模式编制一套完整的演算程序。中国古代数学典籍的许多"术"文，其实就是这种算法程序的文字记述。开方、盈不足、方程诸术就是典型的筹式算法程序。

（4）筹式演算程序是采用文字来叙述的。既没有近代的符号代数，更不可能有现代的程序框图。筹算程序的这种文字表示方式，被西方学者称为"修辞的"（"rhetorical"）④，这是使用符号代数之前算法程序的一种比较原始的（古老的）表达方式。用这种方式来记述一个完整的算法程序，包括筹式的布置，演算与变换的步骤，运算终止的条件，结果的检验等等，是很不简单的。中算

① 这是需要中算家精心设计而来的。

② 运算符号+、－、×、÷，……，及关系符号＝、>、<，……等是近代笔算的产物。

③ 中算家注重并善于运用筹码的"位"。他们用不同的"位"表示不同的"值"，创造了位置制记数法，又利用平面上的上、下、左、右不同位置构造各种形式的筹式，成为数学中新的演算对象。

④ 这是内塞尔曼（Nesselmann，1842年）给完全用文字写出的代数学所起的名字。（参见文献[3]）

家往往采用把一个复杂的程序分解为几个简单程序的组合①来使之简化，很类似于现今程序设计中“子程序”的引进。

从上面的简要分析中可以看出，古代筹算在使用算筹为工具和没有代数符号的条件之下，它的算法设计有很多独特之处。中算家不仅要根据数学原理编排计算的程序(“指令”)，而且首先要考虑在平面上筹式的构图，演算数据的整数化，以及如何用文字简明而准确地表述。凡此种种，算家需要有精密的构思和高超的技巧。在这种意义下，应该说古代筹算法的设计比现代电子计算机计算的程序设计内容更广泛，也要复杂、困难得多。

(二)

《旧唐书·历志三》“开元大衍历经”曰：“演纪上元阏逢困敦之岁，距今开元十二年甲子岁，岁积九千六百六十六万一千七百四十算。”这是关于“演纪上元”之名的最早记载。

清代张敦仁《求一算术》卷下(1803年)专论“演纪之术”，其注曰：“唐麟德术以后，元授时术以前，皆用此术推求上元积算。”据此，近代学者一般认为“唐宋历家皆以演纪法推积年。”②

演纪术推算上元积年与大衍总数术的数学原理不同，概述如下：

设以甲子岁十一月甲子日夜半合朔、冬至为上元，求至某甲子岁之上元积年(即所谓“演纪积年”)$N=60n$。若测得

$$1回归年=365\frac{b}{a}日=(365\times a+b)分=B分③;$$

① 在古代中算文献中，“术”文里经常使用“以……(算法)求之，以……(算法)入之”，即是这种算法的组合。

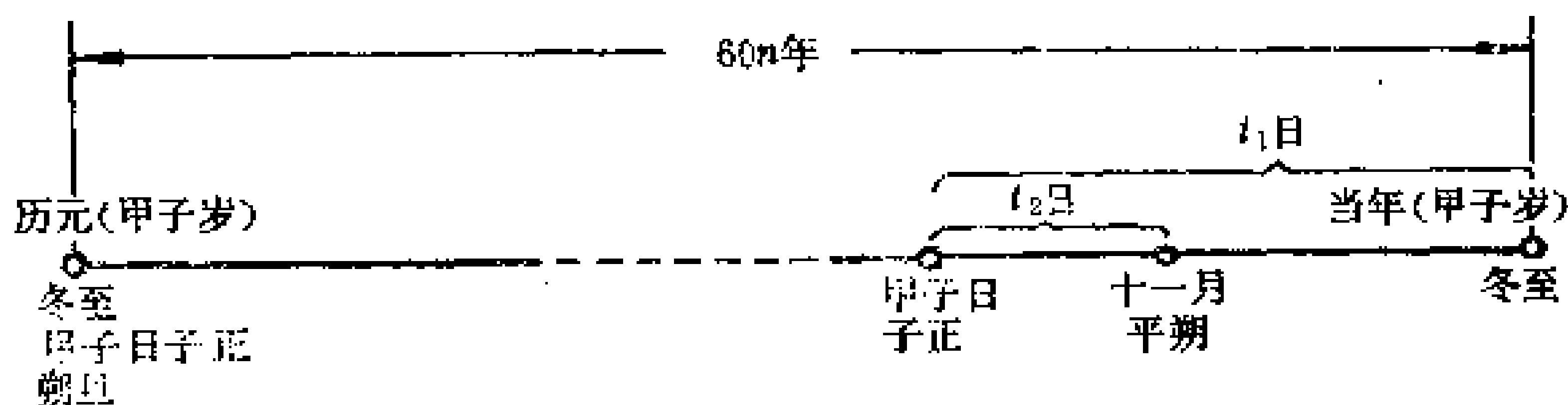
② 参见文献〔4〕第148页。

③ 这里取1分$=\frac{1}{a}$日。$b=[at]$或$b=[at+1]$，即取at的近似整值，其中t是所测冬至气刻分。

$$1\text{ 朔望月}=29\frac{c}{a}\text{日}=(29\times a+c)\text{分}=C\text{分；}$$

$$1\text{ 纪}=60\text{日}=(60\times a)\text{分}=D\text{分。}$$

又实测得该甲子岁冬至在甲子日子正后t_1日，十一月平朔在甲子日子正后t_2日，如下图所示，



则得

$$\text{气泛骨}R_1=t_1\times a(\text{分})；$$

$$\text{朔泛骨 }r_2=t_2\times a(\text{分})；$$

$$\text{朔定骨}r_2{}^*=\begin{cases}[r_2],\text{①}\\ [r_2]+1；\end{cases}$$

$$\text{闰泛骨}R_2=R_1-r_2(\text{分})。$$

这里，称a为日法，b为斗分，c为朔余，B为岁率，C为朔率，D为纪率。于是上元积年$N=60n$应满足：

$$\begin{cases}B\times 60n\equiv R_1(\mathrm{mod}D), & (1)\\ B\times 60n\equiv R_2(\mathrm{mod}C), & (2)\end{cases}$$

“演纪之法”相当于先求出同余式(1)的解后，再代入同余式(2)求解。兹照录秦九韶治历演纪术原文，对照解释如下：

秦九韶在“治历演纪”中依照上述术文所设计的程序推算了开禧历元至开禧三年丁卯岁(公元1207年)之积年。清代张敦仁《求一算术》卷下，对“演纪之法”稍有简化，并“举麟德、大衍、崇天、纪元四术及授时附演一法为例”。[7]

① 记号[ ]表示整部。以上等式表示取朔定骨$r_2{}^*$为朔泛骨的近似整值。

原文	今释
以历法求之，大衍入之。调日法，如何承天术。用强弱母子互乘，得数，并之，为朔余。以二十九日通日法，增入朔余，为朔率。又以日法乘前历所测冬至气刻分，收弃末位为偶数，得斗分。	以何承天术①调得 日法 $a=49m_1+17n_1$，由此推得 朔余 $c=26m_1+9n_1$， 朔率 $C=29a+c$； 设冬至时刻为 t，则取 斗分 $b=[at]$ 或 $[at]+1$②。
与日法，用大衍术入之。求等数、因率、蔀率。	用求一术解同余式(1)。计算 等数 $d=(a,b)$； 蔀率 $E=\frac{a}{d}$，$\left(F=\frac{b}{d}\right)$。 用大衍求一术③求得因率 k，它满足 $kF\equiv 1(\mathrm{mod}E)$。
以纪乘等数为约率，置所求气定骨，如约率而一，得数，以乘因率，满蔀率去之，不满，以纪法乘之，为入元岁。	计算约率 $H=60d$，取气定骨 $R_1^*=\left[\frac{R_1}{H}\right]\times H\approx R_1$④。令 $L=\frac{R_1^*}{H}$。 在同余式(1)中，以 R_1^* 代替 R_1，并用 H 约简之，得 $(365E+F)n\equiv L(\mathrm{mod}E)$ 或 $Fn\equiv L(\mathrm{mod}E)$。(1′)。 由 $kF\equiv 1(\mathrm{mod}E)$， 故 $F(kL)\equiv L(\mathrm{mod}E)$。 设若 $kL=SE+Q$，(S 为非负整

① 参见拙著《秦九韶关于“调日法”的记述》。

② 依秦氏术文，斗分 b 选取偶数。揣其原由，唐初以后历家选取日法（总法）一般采用末位为零之整数，（参见文献[8]），即 a 多为偶数，为便于与斗分 b 相约，故亦取 b 为偶数。

③ 参见拙著《“大衍求一术”溯源》。

④ 亦可取 $R_1^*=\left[\frac{R_1}{H}+1\right]\times H$，这里记号[ ]表整部。显然以 R_1^* 代替 R_1 是为使同余式(1)有解。

原文	今释
	数，而$0\leqslant Q<E$)，则 $n\equiv Q(\mathrm{mod}E)$， $N=60n\equiv 60Q(\mathrm{mod}60E)$， 称$T=60Q$为入元岁，$J=60E$为气元率，则得 $N=Jm+T$. (3)
次置岁日，以日法通之，并以定斗分，为岁率。以十二月乘朔率，减岁率，余为岁闰。	以下演算相当于将(3)代入同余式(2)求解。 计算岁率$B=365a+b$。将(3)代入(2)，得 $B(Jm+T)\equiv R_2^*$①$(\mathrm{mod}C)$。 令岁闰$U=B-12C$，(注意，此时$0<U<C$)，则上式化简为 $UJm+UT\equiv R_2^*(\mathrm{mod}c)$， ………………………………… (2′)
以岁闰乘入元岁，满朔率去之，不满，为入闰，与闰骨相减之，得差，(或适足，便以入元岁为积年，后术并不用；或差在刻分法半数以下者，亦以入元岁为积年。)②必在刻分法半数以上，却以闰泛骨并朔率，得数，内减入闰，余与朔率，	设$UT=lC+V$，(l为非负整数，$0\leqslant V<C$)，称V为入闰。考察闰赢$W=\|V-R_2^*\|$，当$W=0$(或$W\approx 0$②)时，则(2′)化为 $UJm\equiv 0(\mathrm{mod}C)$，于是可取$m=0$，得$N=T$，问题解毕③；当$W>0$时，求闰缩$P$如下

① 同余式(2)中的R_2亦理应修正为整数$R_2^*=R_1^*-r_2^*$，秦氏术草中仍称R_2^*为"闰泛骨"。

② $W\approx 0$即术文所说"差在刻分法半数以下者"可略过不计。"闰赢"之名参见术草。

③ $N=T$，即术文注中所谓"便以入元岁为积年"。于是问题获解，故曰"后术并不用"。

续表

原　　文	今　　释
求闰缩。（在朔余以下，便为闰缩；以上，用朔率减之，亦得。）以纪法乘以法，为纪率。以等数约之，为气元率。以气元率乘岁闰，满朔率去之，不满，为元闰。	$P=\begin{cases}R_2^*-V，当R_2^*>V①，\\R_2^*+c-V，当R_2^*<V.\end{cases}$ 计算纪率 $D=60a$；气元率 $J=\frac{D}{d}$②。设 $UJ=qC+G$，（q 为非负整数，$0\leqslant G<C$），称 G 为元闰。于是同余式(2′)可化为 $Gm\equiv P(\bmod c)$，(2″)
虚置一亿，减入元岁，余为实，元率除之，得乘限。 乃以元闰与朔率，用大衍入之，求得等数、因数、蔀数。以等数约闰缩，得数，以因数乘之，满蔀数去之，不满，在乘限以下，以乘元率，为朔积年。并入元岁，为演纪积年。又加成历年。	按以下公式计算乘限 K^*： $K^*=\frac{10^8-T}{J}$。 为解(2″)，计算等数 $d'=(G,c)$，蔀数 $E'=\frac{C}{d'}$，$\left(F'=\frac{G}{d'}\right)$，由求一术得因数 k'，它使 $k'F'\equiv 1(\bmod E')$。设 $I=\frac{P}{d'}$（I 应为非负整数③，否则(2″)无解），则(2″)化简为 $F'm\equiv I(\bmod E')$， …………………………………… (2‴) 由　$k'F'\equiv 1(\bmod E')$ 知　$F'(k'I)\equiv I(\bmod E')$。 设 $k'I=eE'+K$，（e为非负整数，$0\leqslant K<E'$），称 K 为元数。

① 按术文，闰缩P求法如下：
令$P'=R_2+c-V$，当 $P'<c$时，取$P=P'$，而当$P'>C$时，则取$P=P'-C$。这与上面的表示是一致的。

② 这里给出气元率J的另一计算方法，这与前面 $J=60E$是一致的：$J=60E=60\frac{a}{d}=\frac{D}{d}$。

③ 这可用调整R_2^*（或r_2^*）的办法来实现。

续表

原　　　　文	今　　　　释
	检验元数K。若$K>K^*$，则K不合用，计算需重新从选择日法a开始①；若$K<K^*$，则（$2'''$）有允许的解 $m\equiv K(\mathrm{mod}E')$， 于是得演纪积年② $N=JK+T$。 设某甲子岁至所求年之积年数（即所谓"成历年"）N_1，则上元至所求年之积年数为$N+N_1$。

（三）

秦九韶的"大衍总数术"讨论多个一次同余式的联立求解问题：

$$N\equiv R_i(\mathrm{mod}A_i),\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),(*)$$

这种解法所依据的数学原理，是举世闻名的"中国剩余定理"，即

若$(a_i,\ a_j)=1(\forall_{i,j};\ i\neq j)$，记$M=\prod_1^n a_i$。若有$k_1$，$k_2$，…$k_n$，分别满足

$k_i\dfrac{M}{a_i}\equiv 1(\mathrm{mod}a_i)$，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。则一次同余

① 关于"乘限之设"的要求，($K<K^*$)，清代学者宋景昌〔5〕有解释如下："此盖恐积年过于一亿，运算繁多，故设乘限，以为元数之限。假使历过元数，大于乘限，则日法、朔余便须改设，并蕃数亦改求矣。唐、宋演撰家相沿如此，未可废也。"宋氏的解释是正确的：若$K<K^*$，则$N=JK+T<J.\dfrac{10^8-T}{J}+T=10^8$；反之，若$K>K^*$，则$N>10^8$。

② 原术称JK为朔积年。

式组

$$N \equiv r_i (\mathrm{mod}\, a_i),\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ (**)$$

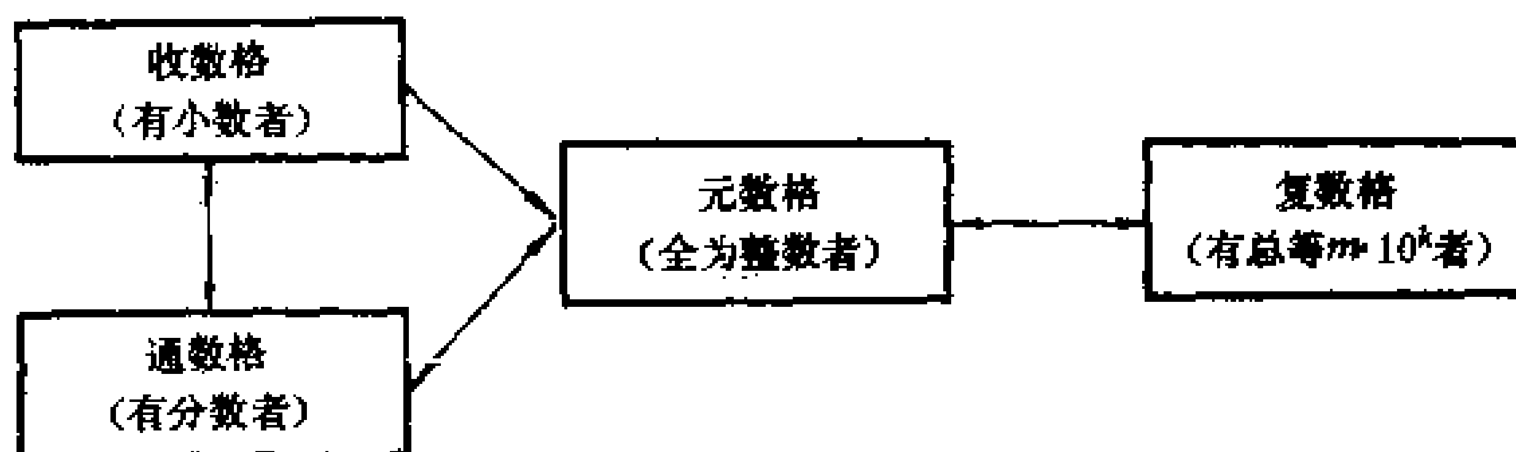
的最小正整数解是

$$N=\sum_{i=1}^{n} r_i k_i \frac{M}{a_i} - PM.$$

这里P是适当的非负整数，它使$0<N\leqslant M$。

依据这一原理，"大衍总数术"的演算程序分为两大部分：

第一部分，是问题数据的标准化。这相当于将同余式组(*)化为(**)。主要是将问数化为定数(即化约A_i为a_i)。秦九韶将问数元数、收数、通数和复数四"格"，分别给出各类问数求定数的化约方法。各"格"之间在一定条件下可相互转化，大致如下图



最终一般归结为元数格或复数格计算。秦氏所设计的求定数演算几乎达到统一的机械化算法的要求①。

第二部分，是按剩余定理演算的程序。这相当于同余式组(**)的求解。秦九韶通过引进一系列专门术语并规定其算法的办法来实现，可依次记述如下：

定数：$a_i (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$(a_{i,j})=1$，$(\forall i,\ j;\ i\neq j)$；

衍母：$M=\prod_{i=1}^{n} a_i$；

衍数：$M_i=\frac{M}{a_i}$，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$；

① 参见拙著：《关于"大衍总数术"中求定数算法的探讨》。

奇数：g_i；$M_i=s_ia_i+g_i$，$0\leqslant g_i<a_i$，（$i=1, 2, \cdots, n$；s_i为正整数）；

乘率：$k_i(i=1, 2, \cdots, n)$，为使$k_ig_i\equiv1(\mathrm{mod}\,a_i)$成立之最小正整数，它由"大衍求一术"算得；

用数：$T_i=k_iM_i$，（$i=1, 2, \cdots, n$）；

余数：$r_i(i=1, 2, \cdots, n)$；

各总：$N_i=T_ir_i$，（$i=1, 2, \cdots, n$）；

总数：$N^*=\sum_{i=1}^{n}N_i$；

所求(率)数：$N=N^*-PM$，（P为适当非负整数，使$0<N\leqslant M$）。

秦九韶在"古历会积"题中，以四分术求开禧积年，即按上述大衍总数术的程序计算①，其《数书九章》"大衍类"更设九问，反复运用这一算法。此后，清代学者张敦仁[7]、黄宗宪[8]论求一术"依秦氏所说略加修饰"②，基本上沿用秦九韶所设计的演算程序。

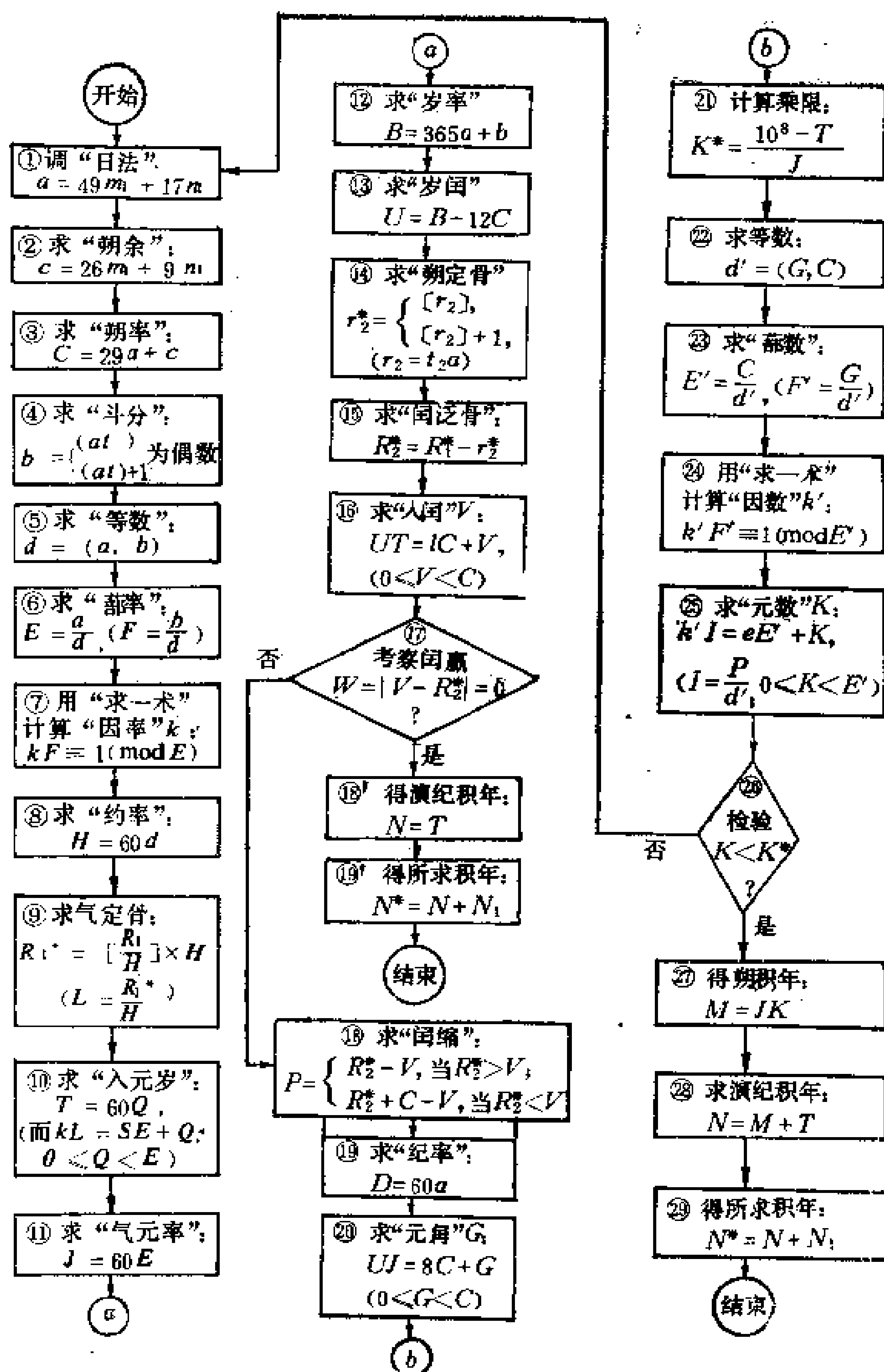
（四）

秦九韶以"演纪之法"与"大衍总数术"处理一次剩余问题，在算法上获得了极大的成功。正如钱宝琮[9]早年所指出："《数书九章》卷一、二大衍类凡九问，未知量多者以八计少亦三记。数旁以本题字，或天干字、八音字标注分别之。数虽繁琐，而依法演算，层次井然。如遇多元，无西法支离之烦，其以奇、定求乘率一法，尤较直捷。演草亦简短明晰。窃尝以为中算之长于西算者，以大衍求一与四元消法为尤著。"

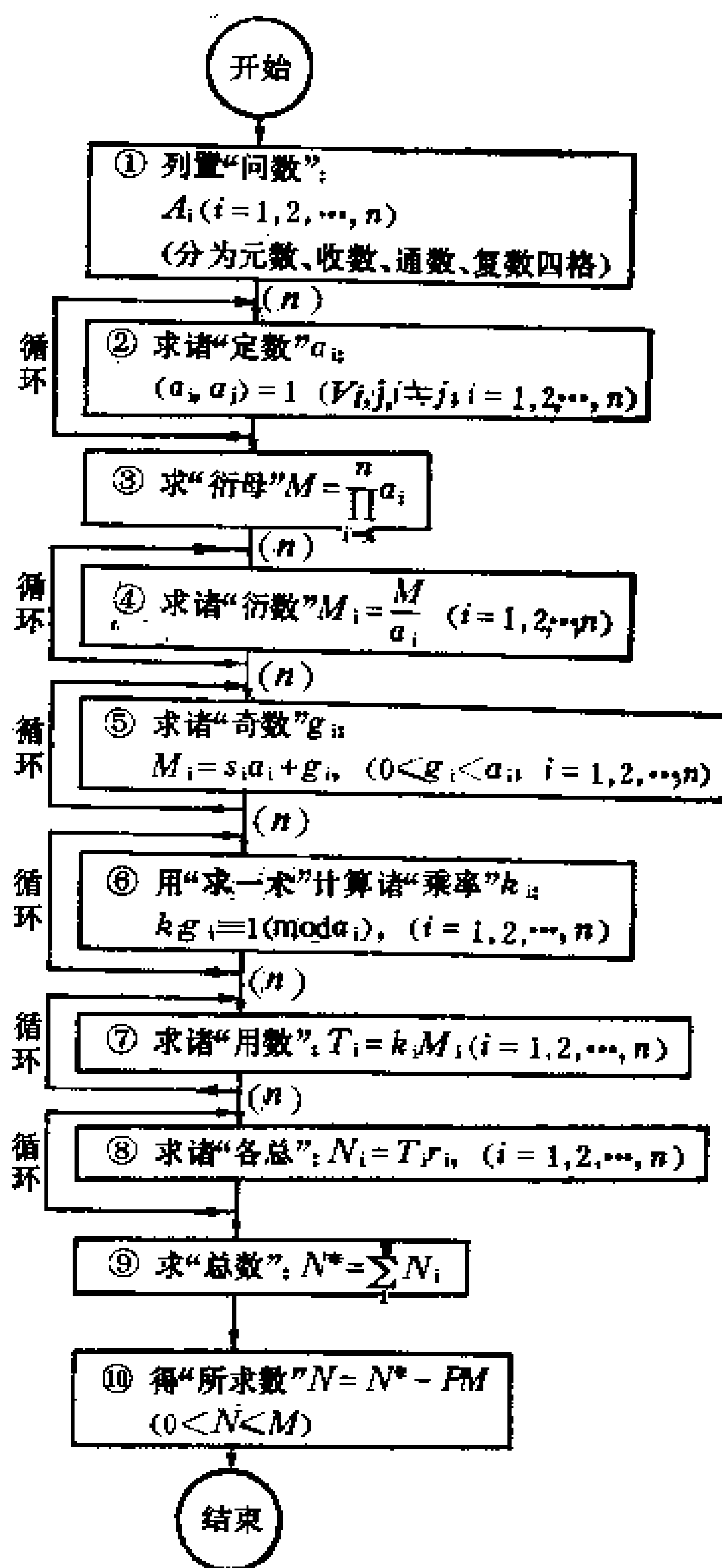
---

① "古历会积"计算有失实与错误之处，致使答案毫无意义，受到后人许多批评，清代学人沈钦裴及弟子宋景昌已为之纠正。（参见[5]）

② 见张敦仁《求一算术》序言。



附图一　"治历演纪"术演算程序框图



附图二 "大衍总数术"演算程序框图

诚然，秦九韶的大衍术在中国古代算法中是很典型的，其中包含着算法程序设计的许多基本方法和技巧，它们和现代电子计算机计算的程序设计在原理上是相通的。如果我们仿照现代程序设计的记号与图式将秦氏大衍术算法译成[①]“程序框图”（见附图一与二），就会发现它与现代算法设计有令人惊奇的相似之处。“治历演纪术”是包含两个“逻辑判断框”的“分支程序”，其判断条件（“$W\approx0$?”和“$K<K^*$?”）在原术文中记述得十分明确。“大衍总数术”，是一个“多重循环程序”，不过这里的循环性表现为n元的对称性。秦九韶大衍术算法的设计，不仅逻辑结构合理，而且计算省便，从今天的眼光来看也是无所指摘的。

“子程序”的运用在大衍术中很普遍，而且很巧妙。“大衍求一术”是一个“循环程序”[②]，它作为最重要的“子程序”在大衍术中被反复套用。何承天“调日法”术[③]，作为“演纪术”的第一个“子程序”，起着调整历法重要数据的基础作用。由问数“求定数”算法，是“大衍总数术”首先采用的一个“子程序”，秦九韶为这一繁难问题设计出一套几乎是统一的机械化算法[④]。

秦九韶将“循环结构”与“分支结构”结合起来，并广泛采用“子程序”的方法，使他的算法程序得以处理象大衍术这样一类非常复杂的问题。现代程序设计中的那些基本的原理、方法和技巧，差不多都可以在秦九韶的算法中找到，它标志着中国古代筹算算法设计的成熟。而古今算法设计的惊人相似，乃是由算法自身的规律与特性所决定的，这与计算所使用的工具无关。

然而，古代算法完全用文字来叙述，要弥补没有符号、图式的缺陷，必须采用其它的方法与技巧。在这方面秦九韶继承了前

---

① 所谓“译成”，是说这里仅仅是把文字的叙述改写成图式的形式，而保持程序的原意。

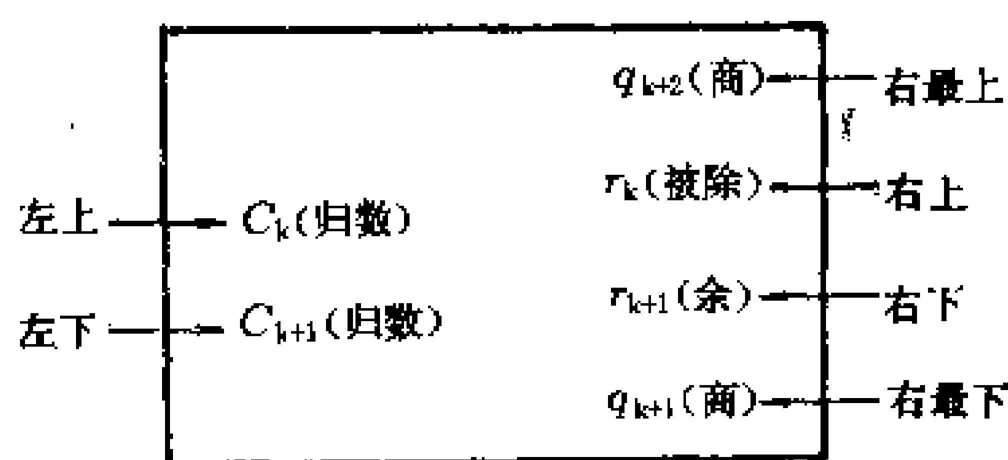
② 参见拙著《“大衍求一术”溯源》。

③ 参见拙著《秦九韶关于“调日法”的记述》。

④ 参见拙著《关于“大衍总数术”中求定数算法的探讨》。

人的技法又有所创新。“大衍求一术”以奇、定二数求乘率，秦氏利用算法具有循环递归的性质，仅用了九十八个字叙述了这一完整算法①。其记述：“置……，立天元一……，递互除之，……，递互累乘，……，须使……而止。乃验……为乘率”。它包括布算列式、初始条件、循环递归程序、结束条件以及对算法特殊情形的注解等在内的全部演算程序。其中连用两个“递互”构成的“循环语句”，把这一递归算法概括得简明而完整②。“治历演纪”术包含着二十多个演算环节，不用符号表示是困难的。秦氏的术文，将全部算法化为日法、朔余、朔率、斗分……等“二十三事”③的计算链条。这种给每步演算结果赋予专门名称(它规定了该环节的特定算法)④，使全部演算程序有条不紊，首尾相连，浑为一体。它与附图一中字母符号的引进⑤，可以说是异曲同工。同样的情形见之于“大衍总数术”中定数、衍母、衍数……等术语的采用。

筹图的构造是中国筹算设计独特的内容。秦氏设计的求一术构图十分精巧。他“置奇右上，定居右下，立天元一于左上”，然后将递归程序所得之“归数”(c_i)交替归于左行上下，形成一个筹码



① 参见拙著，《“大衍求一术”溯源》。

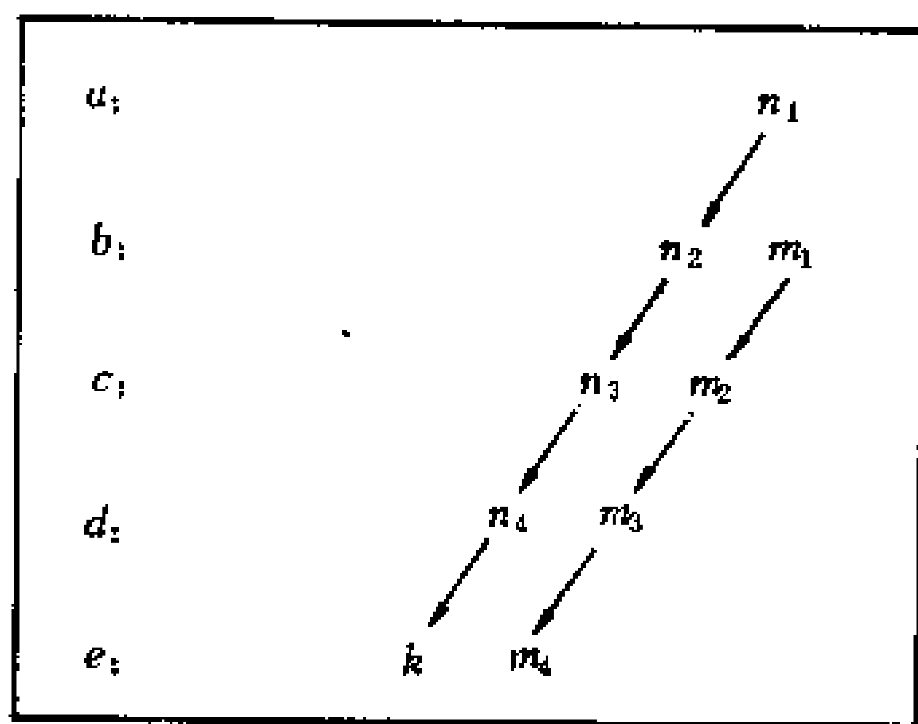
② 在《“大衍求一术”溯源》中对术文有详细解释，此不赘述。

③ 即附图一中加引号“ ”者。

④ 将运算中间结果赋予专门名称的方法已见于刘徽的《海岛算经》，如“表间”、“景差”等。

⑤ 即用a表日法，b表斗分……等等。

四角方阵(如下图)，而辗转相除所得之商(q_i)暂记右行最上、最下。整个演算是筹码四角方阵的逐步变换。在《数书九章》中所见到的筹图已不限于纵横方位的排列，秦氏还设计了所谓"雁翅式"来解连锁比问题。例如"互易推本"、"菽粟互易"、"推计互易"诸问中所作的那样，设已知$\frac{a}{b}=\frac{n_1}{m_1}$；$\frac{b}{c}=\frac{n_2}{m_2}$；$\frac{c}{d}=\frac{n_3}{m_3}$；$\frac{d}{e}=\frac{n_4}{m_4}$。若给定$e=k$，求$a$之值，则将比例关系排成"雁翅"式：



按术文："以多一事者相乘，为实；以少一事者相乘，为法。除之。"便立刻写出

$$a=\frac{n_1\times n_2\times n_3\times n_4\times k}{m_1\times m_2\times m_3\times m_4}。$$

筹式构图的多样性反映了筹算设计的发展。

"立天元一"是构造筹算图式的特殊技巧，它用于定位和规定计算的起点，这在秦九韶的算法设计中被多次应用。"求一术"的构图中它用来标示归数(c_i)的位置和计算的初值$c_0=1$，使整个循环递推演算对称而整齐①。同样的情形见之于由定数求衍数，例如"蓍卦发微"草曰："置一二三四，列右行；立天元一，列左行。以右行一二三四，互乘左行异子一，弗乘对位本子，各得衍数。"

① 参见拙著《"大衍求一术"溯源》。

即列图演算如下：

左（天元）	右（定母）
1	1
1	2
1	3
1	4

→

左（衍数）	右（定母）
$24=1\times2\times3\times4$	1
$12=1\times1\times3\times4$	2
$8=1\times1\times2\times4$	3
$6=1\times1\times2\times3$	4

秦九韶把算法规格化、机械化的原则甚至贯彻到如此细微末节之处。

一般的算法设计是不包含其计算所依据的数学原理的。中国传统数学的算法表现形式，使它的数学原理和理论不能在术文中得以阐明，然而筹算的数学原理或理论往往蕴涵于算法之中。秦氏的“大衍术”是“寓理于算”的一个典型。其“演纪术”有云：“此术非惟止用乘除省便，又且于自然中，取见积年，不惑不差矣。”的确，大衍术的数学原理与思想脉络自然地体现于它的算法程序中，无须专门阐发便使人感到理解而信服。“约奇弗约偶”与“复乘求定之理”，使求定数“既要约去公因子，又要保持所含因子的最高次幂”的原理“不言而喻”。用剩余定理给出的解具有鲜明的构造性：

$$N_1=k_1M_1r_1=a_1[M]+r_1=a_2[M]=\cdots=a_n[M]$$

$$N_2=k_2M_2r_2=a_1[M]=a_2[M]+r_2=\cdots=a_n[M]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N_n=k_nM_nr_n=a_1[M]=a_2[M]=\cdots=a_n[M]+r_n$$

$$+)\qquad -PM=a_1[M]=a_2[M]=\cdots=a_n[M]$$

$$N=\sum_{i=1}^{n}N_i-PM=a_1[M]+r_1=a_2[M]+r_2=\cdots=a_n[M]+r_n$$

（记号 $a_i[M]$ 表示 a_i 的整倍数。）这样构造的 N 显然满足同余式（**），自然不必形式地写出证明。

秦九韶集前人之大成，充分发挥我国筹算模式化、程序化的特点和变换自如的优越性，在算法设计方面有许多的改进与创造，显示出深邃的数学思想和卓越的创造能力。他的算法思想与创作对后世有深远影响①，在算法史上留下了一份珍贵的历史遗产。

参 考 文 献

〔1〕钱宝琮主编，《中国数学史》，科学出版社，(1964年)。

〔2〕李文林等，《中国剩余定理》，《中国古代科技成就》，中国青年出版社，(1978年)。

〔3〕Joseph Needham, Science & Civilisation in China, Volume Ⅲ, Mathematics, Cambridge University Press, 1959.

〔4〕朱文鑫，《历法通志》，商务印书馆，(1934年)。

〔5〕〔清〕宋景昌，《数书九章札记》，(1842年)。

〔6〕李继闵，《"调日法"源流考》，第三届中国科学史国际讨论会论文，(1984年，北京)。

〔7〕〔清〕张敦仁，《求一算术》，(1803年)。

〔8〕〔清〕黄宗宪，《求一术通解》，(1874年)。

〔9〕钱宝琮，《求一术源流考》，《古算考源》，商务印书馆，(1930年)。

〔10〕李文林等，《中国古代不定分析若干问题探讨》，《科技史文集》第8辑，上海科技出版社，(1982年)。

〔11〕李迪，《中国传统数学的程序性》，第二届国际中国科技史研讨会论文，(1983年，香港)。

① 从清代学者焦循、李锐、张敦仁、黄宗宪等的著述中可以看到秦九韶算法思想的闪光。

关于"大衍总数术"中求定数算法的探讨

李 继 闵

秦九韶的大衍总数术讨论一次同余问题：

$$N \equiv R_i (\mathrm{mod} A_i),\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ (*)$$

其问数①由实际问题而来，数据R_i、A_i的情况复杂多样，要用剩余定理求解，首先需要使问题标准化，即将同余式组(*)化为等价的

$$N \equiv r_i (\mathrm{mod} a_i),\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ (**)$$

其中r_i,a_i皆为正整数，且a_i满足以下条件：

(1) a_i为对应A_i的因数，即$a_i | A_i$，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$；

(2) $a_i (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$中两两互素，即$(a_i,\ a_j)=1$，$(\forall i,\ j;\ i \neq j)$；

(3) 诸a_i之积是诸A_i的最小公倍数，即

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = [A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n]。$$

秦氏将适合以上条件的一组模数$\{a_i\}$，称为定数或定母；而由一组问数$\{A_i\}$求相应一组定数$\{a_i\}$的算法，是大衍总数术的第一个重要步骤。

由于中国古代传统数学没有素数概念，并且析因子的方法极少②，求定数的算法颇不简单，秦九韶用了大量的篇幅来叙述它：

---

① "问数"，设问之数，此即是问题的原始数据A_i，R_i，问题由它们完全确定。

② 秦氏在大衍九问中仅能根据尾数判定含2、5、10的因子；"推计土功"问用到诸元数的公因子3，可能已有了判定含因子3的方法。

"大衍总数术曰：置诸问数〔类名有四〕[1]，一曰元数〔谓尾位单零者，……〕，二曰收数〔谓尾见分厘者，……〕，三曰通数〔谓诸数各有分子、母者，……〕，四曰复数〔谓尾位见十或百及千以上者，……〕。

元数者，先以两两连环求等，约奇弗约偶；〔或约得五，而彼有十，乃约偶弗约奇。〕或元数俱偶，约毕可存一位见偶；或皆约而犹有类数存，姑置之，俟与其他约遍，而后乃与姑置者求等约之；或诸数皆不可尽类，则以诸元数命曰复数[2]，以复数格入之。

收数者，乃命尾位分厘作单零，以进所问之数，定位讫，用元数格入之。或如意立数为母，收进分厘，以从所问，用通数格入之。

通数者，置问数，通分内子，互乘之，皆曰通数。求总等，不约一位，约众位，得各元法数，用元数格入之。或诸母数繁，就分从省通之者，皆不用元，各母仍求总等，存一位，约众位，亦各得元法数，亦用元数格入之。

复数者，问数尾位见十以上者。以诸数求总等，存一位，约众位，始得元数。两两连环求等，约奇弗约偶，复乘偶；或约偶弗[3]约奇，复乘奇。皆续等下用之。[4]或彼此可约而犹有类数存者，又相减以求续等，以续等约彼，则必复乘此，乃得定数。所有元数、收数、通数三格，皆有复乘求定之理，悉可入之。

求定数，勿使两位见偶，勿使见一太多，…"

秦九韶将问数分为四类，称之为四"格"。[5]其一为元数，即各问数皆为正整数[6]；其二为收数，即问数中有小数；其三为通数，

---

① 方括号〔…〕内文字为秦氏原注，下同。

② 宋景昌〔1〕云："命曰复数，命误合。馆案云复应作定，案秦氏以求定数系于复数之下，遂命定数为复数耳。"

③ "弗"，各刻本讹作"或"，今依四库馆臣校正。

④ "皆续等下用之"为原本所有，四库馆臣认为"此处可省"而删去，今补之。

⑤ "格"，一定的标准或式样，此为类型。

⑥ 一般说诸A_i无总等，即$(A_1, A_2, \cdots, A_n)=1$，这是元数格与复数格的根本区别。

即问数中有分数；其四为复数，即问数皆为10的整倍数。他分别叙述这四格的算法，其中元数格与复数格是基本的，通数、收数皆最终化归此二格来计算。

一、"元数格"的算法

元数格的基本算法是：两两连环求等，约奇弗约偶。

A_1，A_2，…，A_n要两两相见，不重不漏，需要规定一定的排列顺序。从大衍九问的演草可见，秦九韶把它分为$(n-1)$变来进行。

一变：以A_n依次与A_{n-1}，A_{n-2}，…，A_1，求等相约；

二变：以A_{n-1}依次与A_{n-2}，A_{n-3}，…，A_1，求等相约；

…………

k变：以A_{n-k+1}依次与A_{n-k}，A_{n-k-1}，…，A_1，求等相约；

…………

$n-1$变：A_2与A_1，求等相约。

在每一变中，各元数A_j的地位不尽相同。例如，在k变中，A_{n-k+1}要与多个$(n-k$个$)$元数配对相约，而其它元数仅只与A_{n-k+1}配合相约一次；为了表示这种区别，秦九韶将k变中的元数A_{n-k+1}称之为"偶"，而把其余的元数A_{n-k}，A_{n-k-1}，…，A_1皆称之为"奇"。①

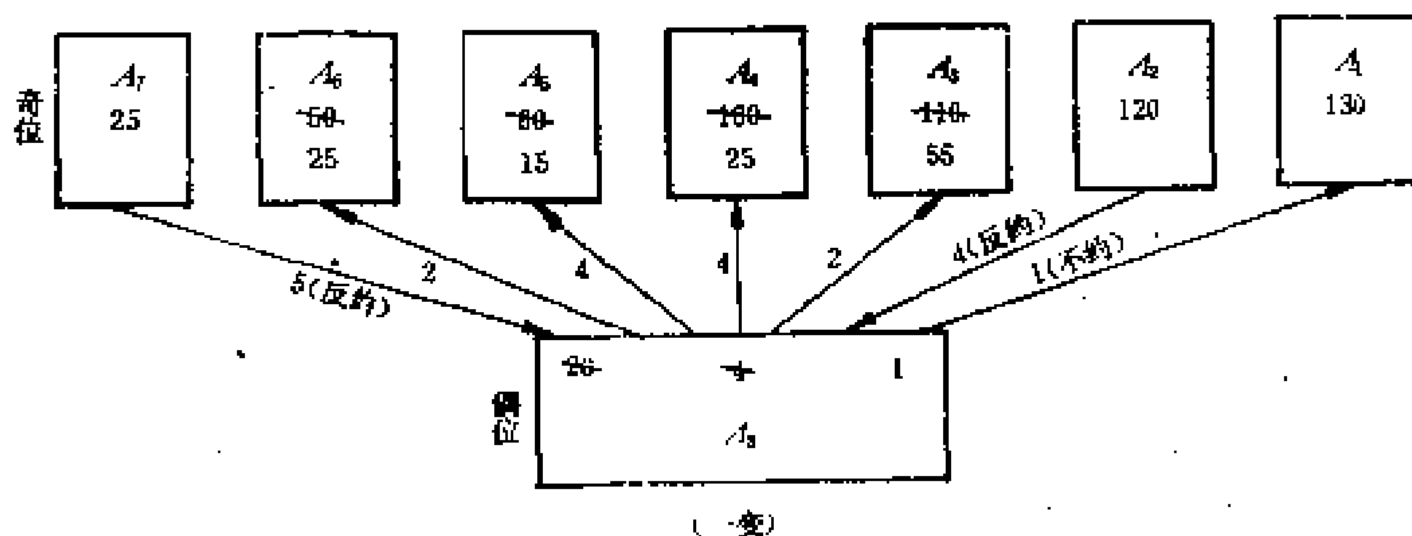
所谓"约奇弗约偶"，是说在k变中，一般是用等数去约处于"奇"位的元数$A_j$$(j<n-k+1)$，而不约处于"偶"位的元数

① 用奇偶表示相对的二"位"，大概与阴阳奇偶说有关。"阳卦奇，阴卦耦"，阴与阳，奇与偶，一般表示相对立的二事物。这里用"奇"表一"变"之中配约一次的元数，而用"偶"表配约多次的元数，这与奇表单一，偶表双（引伸为"多"）数的意义相符。用奇、偶表示"一"与"多"的相对，这在比秦九韶稍晚而同为南宋的杨辉的书序中找到例证。陈几先序《日用算法》说："钱塘杨辉以廉饬已，以儒饰吏，吐胸中之灵机，续前贤之奥旨。从奇而耦，由晦而彰。内可以知外，表可以识里，其用心岂为运牙筹计金谷而已哉。"（关于此处秦氏的奇偶还有与本文不同的种种解释，见文献〔1〕、〔2〕、〔4〕、〔5〕、〔7〕。）

A_{n-k+1}。[①]只是在特殊情形下才有例外，秦九韶特别加注说明："或约得五，而彼有十，乃约偶而弗约奇。"其意是说，只有在"约奇弗约偶"后仍有等数，而"约偶弗约奇"结果互素的情形，才"约偶而弗约奇"。例如，奇位为25，偶位为10，以等数5"约奇弗约偶"，得5与10，仍有续等5；但是若以等数5"约偶弗约奇"，则得25与2，两者互素。在此种情形[②]（也仅在此种情形）便"约偶而弗约奇"，秦氏称之为"反约"。

秦九韶注意到一种非常特殊的情形："皆约而犹有类数存"，即无论"约奇弗约偶"或是"约偶弗约奇"，皆不互素[③]。例如"推计土功"题中的甲54，丁72，等数$d=(54,\ 72)=18$，"约奇弗约偶"，得3与72，有续等3；以等数18"约偶弗约奇"，得54与4，还有续等2。在此情形，先"约奇弗约偶"，而"姑置之，俟与其他约遍，而后乃与姑置者求等约之。"

元数格最典型的算例是"积尺寻源"[④]，其问数从大到下（"维行置之"），是：A_1(金)$=130$；A_2(石)$=120$；A_3(丝)$=110$；A_4(竹)$=100$；A_5(匏)$=60$；A_6(土)$=50$；A_7(革)$=25$；A_8(木)$=20$。按演草分为七变，步骤如下：



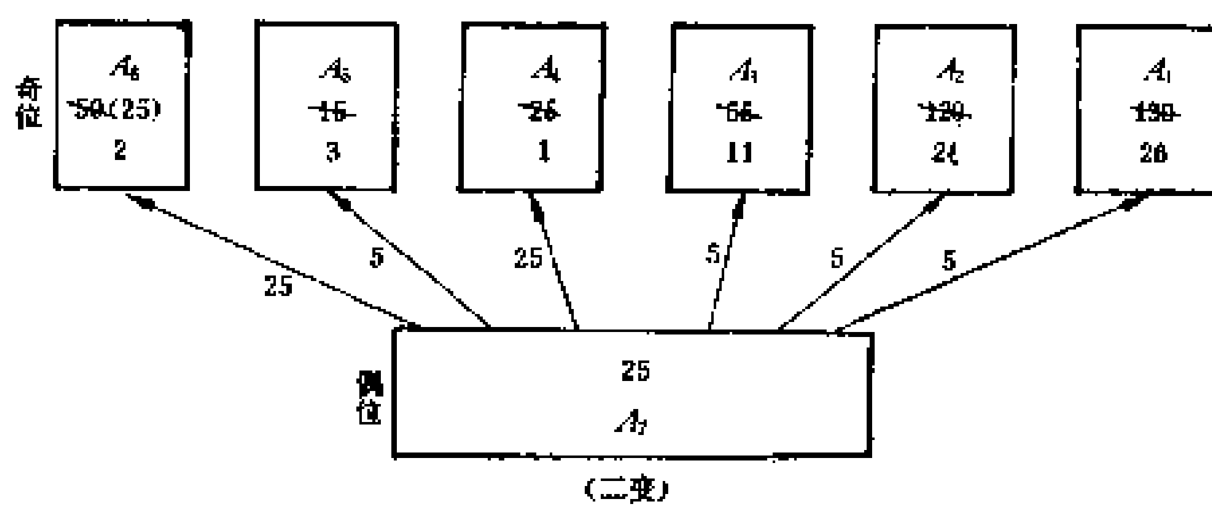
（一变）

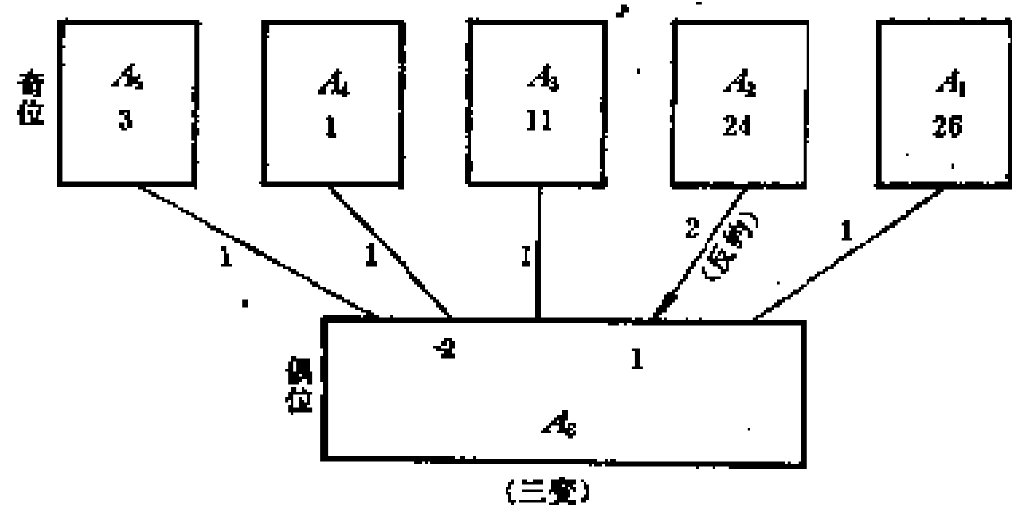
① 这一规定的目的，看来是为使偶位元数所含因子尽早地从其它元数中约去，即使偶位元数尽快地转化为定数。

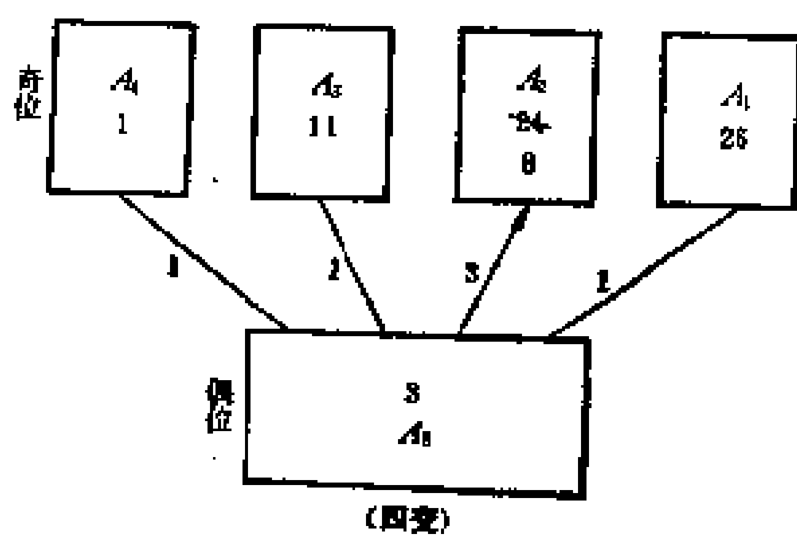
② 例如"积尺寻源"题中就三次出现这种情形，参见下文。

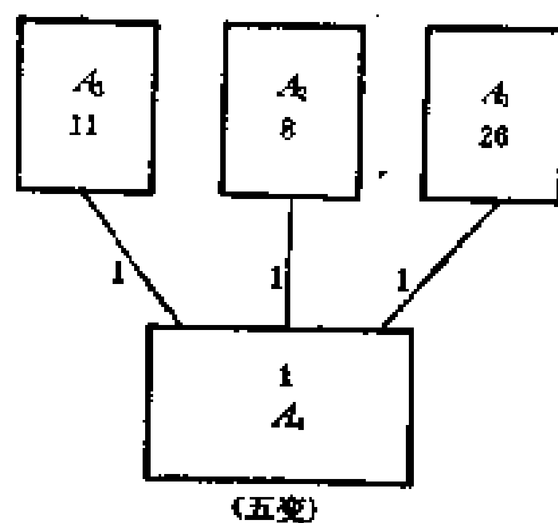
③ 正是这种极为特殊的情形带来化约的麻烦。

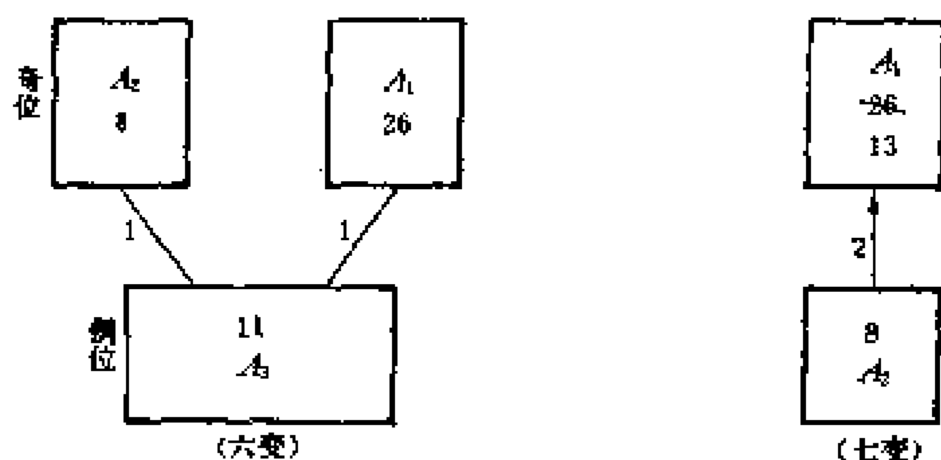
④ "积尺寻源"本属复数格，但秦氏按元数格演算，这表明秦氏将复数格看作元数格之特例。


奇位
偶位
25
(二变)


奇位
偶位
(反约)
(三变)


奇位
偶位
(四变)


(五变)



（六变）　　（七变）

上述“七变”图完全按秦氏所述绘成，其中二变的A_6(土)应为25而误作50。除三处“反约”外，皆是约奇(位)而弗约偶(位)。考察“反约”的原因，皆由于“正约”(约奇弗约偶)所得有续等，而“反约”所得互素①，合于元数格的化约规则。经七变后所得13，8，11，1，3，1，25，1等八数已两两互素，合于定数要求。

“推库额钱”题元数：$A_1=12$，$A_2=11$，$A_3=10$，$A_4=9$，$A_5=8$，$A_6=7$，$A_7=6$；

“蓍卦发微”题元数：$A_4=1$，$A_3=2$，$A_2=3$，$A_1=4$②；

“分粜推原”题元数：$A_1=83$，$A_2=135$，$A_3=110$；

“余米推数”题元数：$A_1=19$，$A_2=17$，$A_3=12$。

秦九韶大衍术注明以上四问与“积尺寻源”皆属元数格③，演草中的步骤亦完全合于元数格的化约规则，只是在元数个数不多的情形不必累赘地标明“变”数。值得注意的是，秦氏将诸A_i已互素的“余米推数”问也归入元数格，即将互素视为$d=1$的特例，使

---

① 一变中，$(A_7, A_8)=(25, 20)\xrightarrow{\text{正约}(5)}(5, 20)=5$，而$\xrightarrow{\text{反约}(5)}(25, 4)=1$；$(A_2, A_8)=(120, 4)\xrightarrow{\text{正约}(4)}(30, 4)=2$，而$\xrightarrow{\text{反约}(4)}(120, 1)=1$。在三变中，$(A_2, A_6)=(24, 2)\xrightarrow{\text{正约}(2)}(12, 2)=2$，而$\xrightarrow{\text{反约}(2)}(24, 1)=1$。

② 元数次序的编排，秦氏一般是按数值大小的(正或反)次序。但有时为了化约上方便而另排次序。

③ 见大衍总数术文中“元数”注。

算法更具普遍性。

一个很有意思的情形出现在"分粜推原"的演草中。秦氏将此问归入元数格，然其演草有云："先以三率求总等，得一。不约。"乍看起来，两相矛盾。元数格求总等1，莫明其妙。合于情理的解释是，秦氏将元数格看作复数格当总等为1时的特例。

秦九韶对元数格作了这样的补充："或诸数皆不可尽类，则以诸元数命曰复数，以复数格入之。"又说："或元数俱偶，约毕可存一位见偶。""尽类"，即无公因数；"皆不尽类"，是说诸数有公因数，亦即总等$d=(A_1, A_2, \cdots, A_n)\neq 1$。此时，便将它们当作复数，按"复数格"计算。由此可知，秦氏的"复数格"实际是泛指总等$d\neq 1$的诸正整数A_i；其所以称"复数者，间数尾位见十以上者"，是因为末尾数字为0的情形常见且显然有总等，而一般情况下求总等很麻烦，不如按元数格计算简便。当然有总等2的情形是容易判定的，所以秦氏说："或元数俱偶，约毕可存一位见偶。"(即指诸A_i均为偶数时，可逐次约去因数2使只保留一个偶数①。)

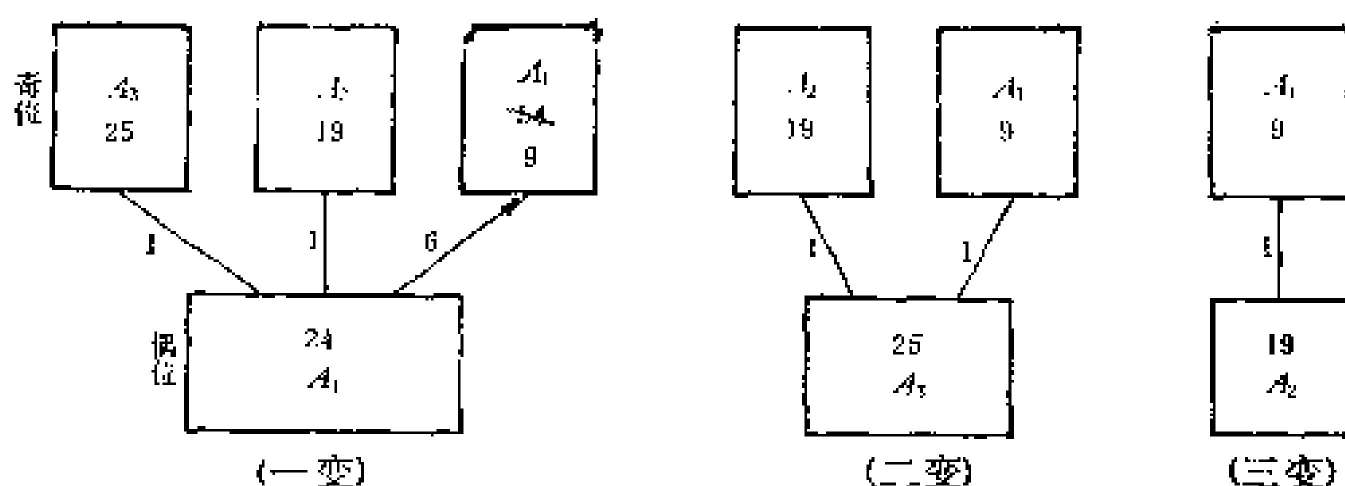
二、"复数格"的计算

复数格的基本算法是：以诸数求总等，存一位，约众位，始得元数。两两连环求等，约奇弗约偶，复乘偶；或约偶弗约奇，复乘奇。皆续等下用之。

复数格的典型算例是"推计土功"题。其问数为：A_1(甲)$=54$，A_2(乙)$=57$，A_3(丙)$=75$，A_4(丁)$=72$。有总等$d=(54, 57, 75, 72)=3$；用总等3约后三位，得$A_2=19$，$A_3=25$，$A_4=24$，而不约$A_1=54$，所得为元数，以下按元数格算法进行。

---

① 这里的"偶"，是指偶数，即双数；与"约奇弗约偶"中的"偶"表示"偶"位意义不同。

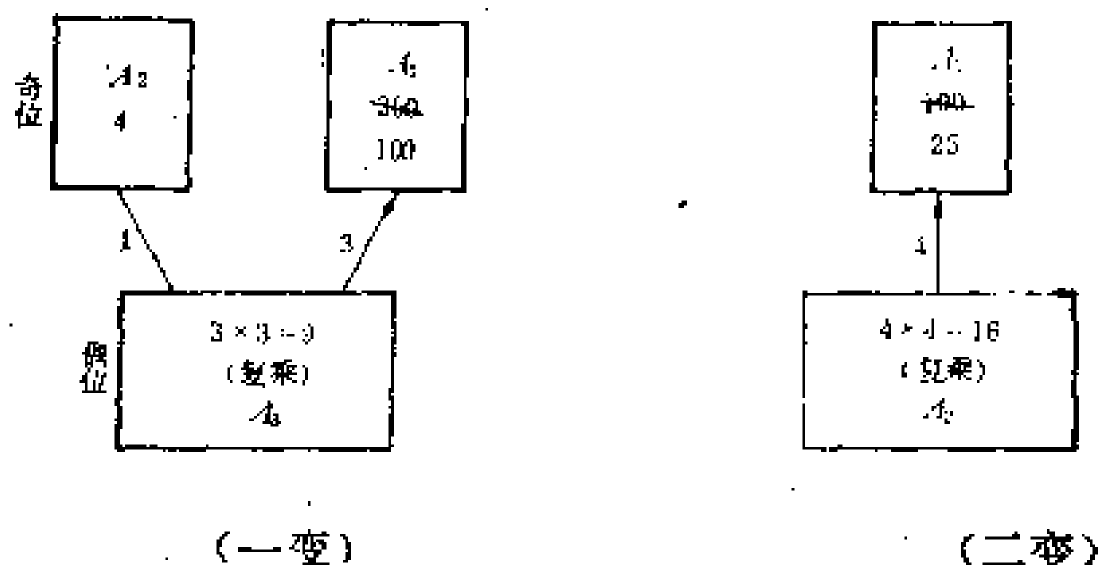


经三变后，复验仍有等数$(A_1, A_4)=(9, 24)=3$，乃用续等3反约A_4得8，而复乘A_1得27。最后，得定数27，19，25，8。

大衍九问中，属复数格者尚有两题。

"程行计地"题，其问数是：A_1(甲)$=300$，A_2(乙)$=240$，A_3(丙)$=180$；有总等$(A_1, A_2, A_3)=60$。存一位A_1，以总等约A_2，A_3，于是得元数：$A_1=300$，$A_2=4$，$A_3=3$。

以下的演算，术文曰："次以连环求等，约奇弗约偶，得定母。"而相应的"草"曰："先以丙、乙求等，得一，不约。次以丙、甲求等，得三。于术约奇不约偶，盖以等三约三，因得一，为奇，虑无衍数，乃使①径先约甲三百，为一百，复以等三乘丙三，为九。既丙九为奇，甲百为偶，此即是约奇弗约偶。次以乙四与甲百求等，得四；以四约一百，得二十五，为甲，复以四乘乙四，得一十六，为乙。各为定母。"按术草计算，即是

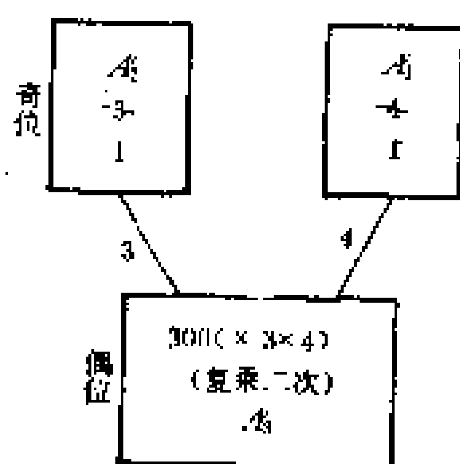


(一变)　　(二变)

① "乃使"，丛书集成本作"乃使径先……"，宜稼堂木刻本、四库本均作"乃便径先……"。

确实合于“约奇弗约偶，(复乘偶)”。但术草中有两处所述令人迷惑费解，今试析如下：

其一，“于术约奇不约偶，盖以等三约三，因得一，为奇，虑无衍数，乃使……”。乍看起来，这段文字似乎多余，且前后两个“约奇不约偶”似有矛盾。我以为秦氏这段话是说“约奇弗约偶”会遇到不同的方式，例如本题会碰上另一种方式。(“盖”，在此是“传疑之词”，意思是说何以不“以等三约三”。)元数的次序与奇位、偶位，一般是预先随意排列的，若是按如下次序进行：A'_3(甲)$=300$，A_1'(乙)$=4$，A_2'(丙)$=3$，于是按“约奇弗约偶”，有



这样化约下去，便会有“无衍数”之“虑”。因为若对A_3'(甲)复乘(3和4)，则得$A'=3600>300$，便与定数a_i满足的条件(1)$a_i|A_i$不符；若不复乘，则得$a_3=300$，$a_1=1$，$a_2=1$，而此时

$$a_1\times a_2\times a_3=300<3600=[A_1', A_2', A_3']$$

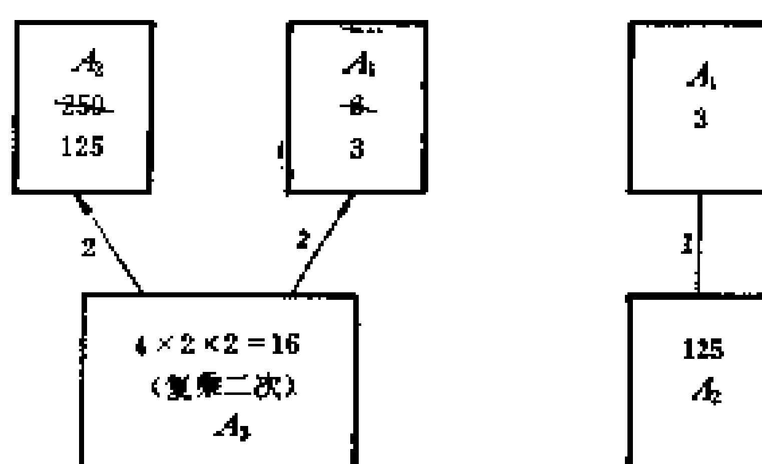
与定数a_i的条件(3)不符。总之，大衍术是无法进行下去(首先无法得到合于要求的衍数)了。因此，在复数格中，元数次序(奇、偶之位)的排列应有适当的选择，否则便不能一般地要求“约奇弗约偶”了①。

其二，“既丙九为奇，甲百为偶，此即是约奇弗约偶。”这里约甲三百为一百，是偶数，复乘丙三为九，是奇数，何以谓“此即约奇弗约偶”？有人疑此文有误，其实不明奇、偶二字在秦氏大衍术中有两种不同的涵义：一是指数值本身的奇与偶，即单与双，

① 大概正是因为如此，复数格的法则将“约奇弗约偶”与“约偶弗约奇”并列，而元数格则只列出“约奇弗约偶”(“约偶弗约奇”只作为例外的情形)。

例如九为奇，百为偶；二是指元数在一"变"中所占的不同之"位"，即奇位与偶位。在奇位的可以是偶数百，在偶位的可以是奇数九。秦氏这句话正在于强调元数在一"变"中所处"位"的奇、偶，是与其本身数值的单、双无关的。

秦九韶另一个复数格的算例出现了纰缪，这就是"程行相及"题。其问数为：A_1(甲)＝300，A_2(乙)＝250，A_3(丙)＝200；以总等(A_1，A_2，A_3)＝50"约甲、丙，存乙"，得A_1＝6，A_2＝250，A_3＝4。依秦氏演草计算如下：



(一变)　　　　(二变)

于是得：3，125，16；但16不是200的因数，与定数应满足的条件(1)不合。①

显然，问题出现在"复乘"上面。秦九韶于复数格中强调"复乘"，"皆续等下用之"，这是有道理的。有续等d_2(它是前一等数d_1的因子)这表明被约者含续等d_2的幂次较未约者要高；为了保证含d_2的最高次幂，自然下一步应当反约，并用d_2复乘前一"被约者"以恢复其含d_2的最高次幂。("复乘"，乘而复原之意。)由于复数格中，在用总等粗略地约化之后，常常会再出现续等，故复数格多用"复乘求定之理"。但是，一般地在"彼此可约而犹有类数存者"②的情形，"又相减以求续等"也是常有的事，因此，秦氏特别

① 由于本题设问的特殊性，这个纰缪并未影响答案的正确，秦氏又未认真检验，以致铸成此误。

② 在元数格中，正约、反约皆不互素而"姑置者"的情形，就必有续等。

指出："所有元数、收数、通数三格皆有复乘求定之理，悉可入之。"这些地方都表现出秦九韶对求定数算法研究得相当精深。然而，秦氏关于"复乘"之理并未详尽。例如本题，以总等50($=2\times 5^2$)约丙200，得$A_3=4$，与$A_2=250$有续等$(4, 250)=2$，以2复乘$A_3=4\times 2=8$，其实已恢复了丙中含2的最高次幂2^3。再求得续等$(A_3, A_1)=(8, 6)=2$时，便不应再"复乘"了。秦九韶在续等下一概复乘，在算理上还不够周密。①

三、"收数格"与"通数格"的算法

秦氏关于收数格的算法有二：

其一，化为元数格计算："乃命尾位分厘作单零"，即把末位上的分、厘之类的小数化为个位数，相当于现今将小数点向后移动几位而化成整数，于是可按元(复)数格计算。

其二，化为通数格(然后化为元数格)计算："如意立数为母，收进分厘"，即选取适当的数为分母，以分母乘各小数而取近似整数为分子，便化各问数为通数。

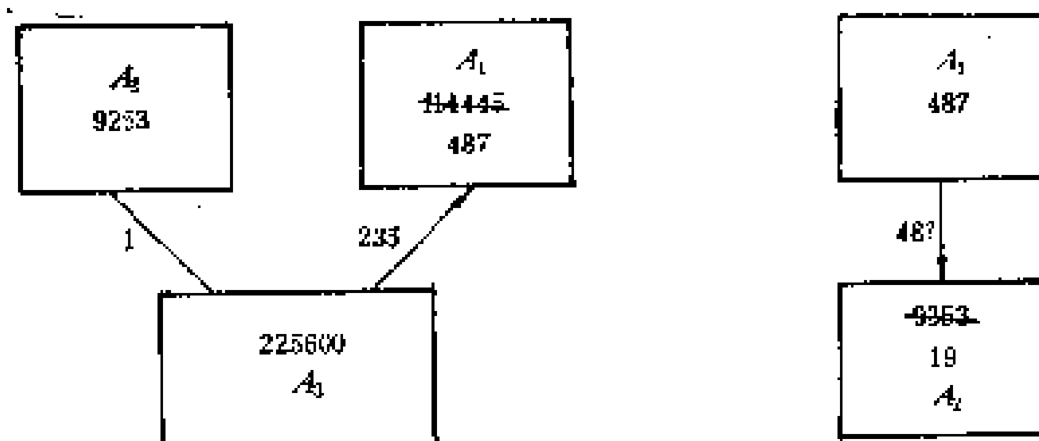
通数格的基本算法是："置问数，通分内子，互乘之，皆曰通数。求总等，不约一位，约众位，得各元法数，用元数格入之。"

通数格的算例是"古历会积"题。其问数是：A_1(气)$=365\frac{1}{4}$，A_2(朔)$=29\frac{499}{940}$，A_3(纪)$=60$。依术草计算，先"通分内子"，得$A_1=\frac{1461}{4}$，$A_2=\frac{27759}{940}$，$A_3=60$。然后"互乘之"：

	母	子	互乘	元数
A_1:	4	1461	$\times 940\times 1$	$=1373340$
A_2:	940	27759	$\times 4\times 1$	$=111036$
A_3:	1	60	$\times 4\times 940$	$=225600$

① 关于此题产生纰缪的原因还可能作另外的推测与解释，但是秦氏复数格中何时用续等复乘，何时又不复乘的条件是没有说明的。

求总等$(A_1, A_2, A_3)=12$，以约A_1，A_2，不约A_3，得$A_1=114445$，$A_2=9253$，$A_3=225600$。最后，按元数格计算：



于是得定数487，19，225600。这里不以等数487约A_1，得1，而反约A_2，是为了满足求定数"勿使见一太多"的要求。值得注意的是，在本题中，正确地没有进行"复乘"。秦氏特别在术文中指出："本题欲求一会，不复乘偶"。所谓"欲求一会"，即是说求上元积年问题所要求的解，是满足剩余条件的最小正整数。由此可见，秦九韶已经认识到，当"复乘"不适当时，元数不满足条件$a_i|A_i$，这时求得的解N，便不是一次剩余问题的最小整解，他的见解是正确的[①]。

四、求定数算法的"机械化"

秦九韶求定数算法的设计表现出想建立一种统一的、一般的算法的企图，但是他没有给出一个统一的机械化算法将模数化为两两互素。他的演算程序中，有些步骤走了弯路。例如，设置复数格，"求总等，存一位，约众位"，其用意在于加速诸A_i的化约过程，却"欲速则不达"，弄巧成拙，如此往往带来了求续等而复乘的麻烦[②]。又如，当"皆约而犹有类数存"时，本可一鼓作气地约到互素完事，他却"姑置之，俟与其他约遍，而后乃与姑置者

① 这容易从理论上得到证明。李文铭曾注意到这一点。

② 复数格的设置完全没有必要。清代张敦仁《求一算术》即废弃了复数格算法。

求等约之"，这样枉受"复验"的累赘。

其实，只要对秦九韶的设计稍加改进，就可以得到求定数的一种统一的机械化算法。我们用记号叙述这种算法如下：

设有元数A_1，A_2，A_3，……，A_n。先将A_n依次与A_{n-1}，A_{n-2}，…，A_2，A_1化约，具体步骤是

(1) 求等数$(A_{n-1}, A_n)=d_1$，令$A'_{n-1}=\frac{A_{n-1}}{d_1}$，$A'_n=A_n$；

(2) 求续等$(A'_{n-1}, A'_n)=d_2$，令$A''_{n-1}=A'_{n-1}\times d_2$，$A''_n=\frac{A'_n}{d_2}$；

(3) 再求续等$(A''_{n-1}, A''_n)=d_3$，令$A'''_{n-1}=A''_{n-1}\times d_3$，$A'''_n=\frac{A''_n}{d_3}$；

……

(k)求续等$(A^{(k-1)}_{n-1}, A^{(k-1)}_n)=d_k$，令$A^{(k)}_{n-1}=A^{(k-1)}_{n-1}\times d_k$，$A^{(k)}_n=\frac{A^{(k-1)}_n}{d_k}$。

这样继续下去，直到求得满足以下条件的$A^{(k)}_{n-1}$，$A^{(k)}_n$为止：

i)　$(A^{(k)}_{n-1}, A^{(k)}_n)=d_{k+1}=1$，$(d_k\neq 1)$；

ii)　$A^{(k)}_{n-1}|A_{n-1}$，而$A^{(k)}_n|A_n$；

iii)　$[A^{(k)}_{n-1}, A^{(k)}_n]=[A_{n-1}, A_n]$。

这样的k是存在的。事实上，设$A_n=Bd_1$，则$(A'_{n-1}, B)=1$
$d_2=(A'_{n-1}, A'_n)=(A'_{n-1}, d_1)$，故$d_2|d_1$，令$d_1=d_2\times S_1$。由$d_3=(A''_{n-1}, A''_n)=(A''_{n-1}, BS_1)=(A''_{n-1}, S_1)$，故$d_3|S_1$，令$d_1=d_2\cdot d_3\cdot S_2$。如此继续下去，得$d_1=d_2\cdot d_3\cdots\cdots d_m\cdot S_{m-1}$，而$S_1>S_2>\cdots\cdots>S_{m-1}$，据$d_1$的有限性知必有$d_{k+1}=1$，于是$A^{(k)}_{n-1}$，$A^{(k)}_n$满足i)。

由$A^{(k)}_{n-1}=A'_{n-1}\cdot d_2\cdot d_3\cdots\cdots\cdot d_k=A'_{n-1}\cdot\frac{d_1}{S_{k-1}}=\frac{A_{n-1}}{S_{k-1}}$，知$A^{(k)}_{n-1}|A_{n-1}$；而$A_n=A'_n=A''_n\cdot d_2=A'''_n\cdot d_2\cdot d_3=\cdots=A^{(k)}_n\cdot d_2\cdot d_3\cdots\cdots d_k$，知$A^{(k)}_n|A_n$，于是ii)成立。

再由 $[A_{n-1}, A_n]=\frac{A_{n-1}\cdot A_n}{d_1}=A'_{n-1}\cdot A'_n=A''_{n-1}\cdot A''_n=$ $\cdots\cdots=A^{(k)}_{n-1}\cdot A^{(k)}_n=[A^{(k)}_{n-1}, A^{(k)}_n]$，即知iii)成立。

这样将A_{n-1}，A_n化约为互素的$A^{(k)}_{n-1}$，$A^{(k)}_n$，我们仍记为A_{n-1}，A_n。如此将A_n依次分别与A_{n-2}，A_{n-3}，……，A_1化约毕，把约得的A_n记为a_n，其余仍记为$A_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$。

对A_{n-1}，A_{n-2}，……，A_2依次分别重复对A_n的演算，则逐一得到a_{n-1}，a_{n-2}，……，a_2和a_1，则这一组$a_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$即是一组定数。它满足条件(1)和(2)是显然的。而由关系$[A_1, \cdots\cdots A_{n-2}, [A_{n-1}, A_n]]=[A_1, \cdots\cdots, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n]$，容易推知条件(3)亦满足。

我们用上述方法来重新计算“推计土功”题如下：$A_1=54$，$A_2=57$，$A_3=75$，$A_4=72$。

$$\begin{pmatrix}75\\72\end{pmatrix}\xrightarrow{d_1=3}\begin{pmatrix}25\\72\end{pmatrix}d_2=1\text{止。}\quad\begin{pmatrix}57\\72\end{pmatrix}\xrightarrow{d_1=3}\begin{pmatrix}19\\72\end{pmatrix}d_2=1\text{止。}$$

$$\begin{pmatrix}54\\72\end{pmatrix}\xrightarrow{d_1=18}\begin{pmatrix}3\\72\end{pmatrix}\xrightarrow{d_2=3}\begin{pmatrix}9\\24\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3=3}\begin{pmatrix}27\\8\end{pmatrix}d_4=1\text{止。}$$

得$a_4=8$；$A_1=27$，$A_2=19$，$A_3=25$。

$$\begin{pmatrix}19\\25\end{pmatrix}d_1=1\text{止。}\quad\begin{pmatrix}27\\25\end{pmatrix}d_1=1\text{止，}\quad\text{得}a_3=25\text{；}A_1=27\text{，}A_2=19\text{。}$$

$$\begin{pmatrix}27\\19\end{pmatrix}d_1=1\text{止，}\quad\text{得}a_2=19\text{，}a_1=27\text{，化约毕。}$$

容易理解上述算法是“两两连环求等，约奇弗约偶”，求续等“约偶弗约奇，复乘奇”两种基本运算的机械组合，它是在秦九韶算法基础上稍加改进而得的。因此，可以说秦氏的求定数计算几乎达到统一的机械化算法的要求。在中国古代数学没有素数概念的历史条件下，能达到这样的水平，是难能可贵的。

清代学者黄宗宪在西方数学的影响下，利用素数概念改进秦

九韶的求定数算法，在其《求一术通解》中提出“拆各泛母为极小数根”法(即将各A_i分解为素因子)，从而使定数计算原理清晰，理论上臻于完善，受到一般的推崇。但是，从算法的角度，特别是算法的机械化来看，以秦九韶为代表的中国传统数学的方法更为实用，它的价值是不容低估的。

参 考 文 献

〔1〕〔清〕宋景昌：《数书九章札记》，(1842年)。
〔2〕〔清〕张敦仁：《求一算术》，(1803年)。
〔3〕〔清〕黄宗宪：《求一术通解》，(1874年)。
〔4〕李俨：《大衍求一术的过去和未来》，《中算史论丛》第一集，科学出版社(1954年)。
〔5〕钱宝琮：《秦九韶〈数书九章〉研究》，《宋元数学史论文集》，科学出版社，(1966年)。
〔6〕李文林等：《中国古代不定分析若干问题探讨》，《科技史文集》第8辑，上海科学技术出版社，(1982年)。
〔7〕钱克仁：《秦九韶大衍求一术中的求定数问题》，第三届中国科学史国际讨论会论文，(1984年，北京)。
〔8〕莫绍揆：《假如没有素数概念该怎么办?》，《数学研究与评论》第二卷，第4期，(1982年)。

中国古代不定分析的成就与特色*

李 继 闵

不定分析的研究是中国数学史上最有独创性的杰出成就之一，也是中外数学史家所特别有兴趣的论题。早在清代中叶，中国学者便开始了对古典数学中百鸡、求一诸术的考释与研讨。自1852年英人伟烈亚力(Alexander Wylie)的《中国科学摘记》介绍"大衍求一术"以来，中国古代不定分析的成就便一直受到世界学者的瞩目。二百多年来，这方面的中外论著层出不穷，近期更有许多鸿文问世。

关于中算家不定分析研究的若干争鸣问题，虽然曾对中算史研究产生过重要的影响，但是要全面评述中外学者各种不同的论点是没有可能与必要的。因为如果离开了对中国传统数学历史渊源的认真清理和理论特色的深入探讨，那就只能是"仁者见仁，智者见智"，无法得到一致的见解。本文在概括近年有关研究成果的基础上，分析中国古代不定分析发展的历史源流、学术成就和理论特色，以期对这个丰富多采的领域的悠久而曲折的历史进程勾画出一个较为清晰的轮廓。

(一)

中算家的不定分析研究主要在一次剩余和一次不定方程问题方面，这与以丢番图(Dio-Phantus，约公元246—330年)为代表的古代希腊数学几乎全部是二次不定方程，形成了鲜明的对照。过

* 本文曾在第二届国际中国科技史研讨会(1983年，香港)报告，今略有修改。

去一般认为中国古代没有二次不定方程问题的研究；而新近的发掘表明早在《九章算术》中已给出了整勾股数的一般公式，① 并且刘徽（公元263年）的注中用纯几何的方法作了严谨而精采的证明[1]，这实际上已属于二次不定方程整解问题之滥觞。

一次不定分析在中算史上源远流长。从现存历史文献来看，它上溯西汉，下迄晚清，前后两千余年，或行用于历法，或记述于算术，世代相传，长盛不衰。

中国不定分析发展的历史线索是错综复杂的。一次同余问题与一次不定方程问题平行而交错地发展，它们又和古代渐近分数算法盘根错节，并蒂而生。由于年代久远史料残缺，倘若忽视这个学科的各个方面在时间与空间的发展上的纵横联系，仅着眼于某些片断史料的孤立考证，就往往会陷入迷茫的困境。

一次剩余问题是中国古代不定分析的主流，以致可以简单地把中算家的不定分析称为"大衍术"。一次剩余问题在中算史上有如此显要地位，是有着特殊的历史背景的，这就是历法中上元积年推算的需要。在中国，"古人治历的基本观念，首先注重历元；一定要以甲子那天恰好是夜半朔旦冬至，作为起算的开始。古人于历元之外，还要求日月合璧、五星联珠，定为上元；于是还要推算七政的周期，使它同时发生于历元，作为出发的始点，起算的开端。后来，治历的人都沉溺在上元积年的推算，埋头于各种周期的测验；所以一部中国历法史，实际上可以说是上元的演算史。"②而历法作为皇权的象征，在中国封建时代具有无比神圣的意义，因而大衍术在中国古代历算中的早期产生和持续发展便是不言而喻的了。

从古六历直到元代《授时历》，上元积年的推算在中国历法史上经历了漫长的历史时期。有关汉代太初历之前所施行的"黄帝"、

① 别辽兹金娜(Э. И. Березкина)亦指出这一点。

② 引自陈遵妫：《中国古代天文学简史》，上海人民出版社，1955，第一版，27—28页。

“颛顼”、“夏”、“殷”、“周”、“鲁”等古六历历元的资料，流传下来的很少。因而，西汉以前历法上元积年的推算已无从详考。

汉历上元积年的推算，很早便引起中外学者的兴趣。日本学者新城新藏[2]曾探讨过三统历与古四分历上元积年的计算，得到推算三统上元积年的不定方程：

$$N=4617\times P=1728\times q+\frac{144}{145}(60n+x)$$

(其中P，q，N为整数，x为小于1之分数，应为太初元年岁星所在之位置)。近年来，李文林等[3]考证三统历与古四分历上元积年的推算，认为它有赖于求解如下形式的一次不定方程：

$$aP-bq=R,$$

或者等价的一次同余式：

$$aP\equiv R(\bmod\ b)。$$

断言[4]至迟从西汉末年开始，中算家已能求解上述形式的一次不定方程或一次同余式，并且已有判别它们有无正整数解的某些知识。

本世纪五十年代初，吕子方根据对三统历法数据来源的考证[5]，推断西汉历算中已使用连分数算法，认为《汉书·律历志》“五步”所谓“通其率”即含有求连分数之意。此说曾受到中国学术界的重视[6]，但吕文直到近年才作为遗著问世，并再度引起人们的瞩目[7]。

最近，笔者[8]详考“通其率”算法，推断它是由约分术发展而来的一种渐近分数算法。所谓“其率”，是比率的近似整值，它作为西汉算术的专门用语已见于《九章算术》[9]。而所谓“通其率”，即是对辗转相除所得一系列整商(即“其率”)施行类似“通分纳子”的程序化演算。这种算法以其率的换算来代替原始“约分术”的“以等约之”①，是一个很有意义的改进，这不仅使得约分的计算

① 即由辗转相除得最大公约数(古称等数)$d=r_{n-1}$，再以d约分子、分母得既约分数。这种算法见载《九章算术》，可能是最初的方法。

在许多场合得到简化①；而且自然地给出其渐近分数序列。从而使"通其率"成为中国古代分数近似法的重要工具，在三统历法等古代天文数据的处理中得到广泛的应用。

在另一篇论文[10]中，作者通过对《三统历》、古四分历，东汉四分历和《乾象历》上元积年计算的考证，认为汉代历元的推算实际上归结为一次剩余问题，历算家运用"通其率"术成功地处理了这类问题。这本质上是渐近分数性质的一个应用，并推断至迟在《乾象历》时代（公元三世纪）后世所谓的"求一术"便已经完全成熟了。

东汉以后，中国历算家追求理想上元之风愈盛，不仅要求上元是节气、朔望、日名干支、五星运动等等的共同起点，而且在发现了交点月、近点月等周期之后，又把这些因素加入到理想上元中去。这种理想上元包含的天文内容愈加丰富，因而推算历元所归结的数学问题就愈为复杂。它已不是汉历推元所提出的简单一次同余问题，而通常都相当于多个一次同余式的联立求解。一般认为[11]，公元三世纪施行的《景初历》上元积年的推算相当于求解同余式组

$$aN\equiv R_1(\text{mod } 60)\equiv R_2(\text{mod } b),$$

（其中a是一回归年月数，b是一朔望月日数，R_1为本年冬至距甲子日零时的时间，R_2为冬至距十一月平朔的时间）。而南北朝祖冲之的《大明历》（公元462年）上元积年的计算则相当于要求解十个同余式了。据此，钱宝琮[12]断言："大约在三世纪中历法工作者开始用剩余定理计算上元积年。"并且认为"《孙子算经》里'物不知数'问题解法不是作者的向壁虚造而很可能是依据当代天文学家的上元积年算法写出来的。"

《孙子算经》"物不知数"问给出一次同余式组$N\equiv R_1(\text{mod}3)\equiv R_2(\text{mod}5)\equiv R_3(\text{mod}7)$的解：

① 在等数较大的情形，"通其率"互乘累加比用等数除之省算。

$$N=70R_1+21R_2+15R_3-105P,\ (P\text{为整数})。$$

尽管它没有明确表述为一般定理，然而"剩余定理"的基本形式已经包含在这一解法之中。关于《孙子算经》成书年代虽有异议，但至迟出现于公元400年前后的说法[13]被认为是可以接受的。

剩余定理的明确而系统的叙述是秦九韶的《数书九章》（公元1247年）。秦氏明确给出一次同余式组 $N\equiv r_i(\mathrm{mod}\,a_i)$，（$i=1, 2, \cdots, n$，并且$a_i$两两互素）解的一般形式

$$N=\sum_{i=1}^{n} r_i k_i \frac{M}{a_i}-PM,\ (P\text{为非负整数})。$$

这里$M=\prod_{i=1}^{n} a_i$；乘率k_i（$i=1, 2, \cdots, n$）满足

$$k_i\times\frac{M}{a_i}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,a_i)。$$

秦氏所述"大衍求一术"给出求乘率 k_i 的演算程序（它与"通其率"中C_k的计算程序完全一致）。而且"大衍总数术"将剩余定理推广到模数a_i非两两互素的情形。他所设计的化元数为定数的程序，几乎给出了将模数化为两两互素的统一的机械化算法[14]。

《数书九章》所述"演纪术"，是推算上元积年的另一种方法。这种方法将上元积年的计算化归为日法、朔余、……等"二十三事"的依次推求。实质上，它相当于在处理一次同余式组问题时，先从一个同余式解出后，代入另一同余式，如此逐个求解[14]。秦氏以演纪术推演《开禧历》历元，认为此法乃历算家所常用。据清代学者张敦仁[42]对演纪术之考证，"唐麟德术以后，元授时术以前用此术推求上元积算"，其《求一算术》卷下列举麟德、大衍、崇天、纪元等历元以演纪术推求之步骤。①

元代《授时历》（公元1280年）以后取消了上元积年，大衍术从此在历法中"声销迹灭"了，而且由于"上元之法久不行用，于是古人所以推求七曜齐同之故，五百年来无有知其说者矣。"②这表明，

① 参见文献〔14〕。

② 见张敦仁，《求一算术序》。

离开了历法推算的实际需要，大衍术也就失去了蓬勃的生机。

自十三世纪末至十六世纪末，大衍术以数学游戏的形式普及于算书，流传于民间。杨辉《续古摘奇算法》(公元1275年)载孙子问题名曰“剪管术”，周密《志雅堂杂钞》(公元1290年)称之为“鬼谷算”(又名“隔墙算”)，并以诗歌隐括。明代严恭《通原算法》(公元1372年)记述剩余问题称为“管术”。周述学《神道大编历宗算会》(公元1558年)将剩余问题列入“总分”条叙述。程大位《算法统宗》(公元1593年)载“孙子歌”(又名“韩信点兵”)：“三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆正月半，除百令五便得知。”虽然这一时期大衍术以歌诀的形式广泛流传于民间，但是它始终没有超越孙子问题的水平，在数学的理论与方法上是没有任何新建树可言的。

在十七世纪西方数学传入中国之前，大衍术在中算史上发展的概况已如上述。而与此平行发展的是以百鸡术为代表的一次不定方程问题的研究。

中国不定方程的启始，通常都追溯到《九章算术》。“粟米”章的“其率术”(后世称“贵贱之术”)长期以来被认为是不定问题。三上义夫[15]曾归之为四元二次不定方程整解问题，此说虽附和者不少，但颇有疑义。新近，笔者[9]考察《九章算术》比率算法之渊源，已辨明此“不定方程说”完全是一种误解。

《九章算术》“方程”章“五家共井”问题，按现今代数方法可列如下方程组：

$$\begin{cases} 2x+y=w \\ 3y+z=w \\ 4z+u=w \\ 5u+v=w \\ 6v+x=w \end{cases}$$

《九章算术》依“方程”术演算并给出一组答案。而刘徽注指出此乃“举率以言之”，(意指问题的解答是无穷多组彼此成比例的数，这

仅是其中互素的一组整解)。可见中算家已认识到此问题的不定性。但这种特殊的一次齐次问题，完全可按“方程”术求解，并不能引导出新的方法与理论，因而“五家共井”问题在中国古代不定分析的发展中未能产生明显的影响。

中国古代一次不定方程问题的研究，笔者[16]认为基本上是围绕两个问题展开的：一个是算术中的百鸡类问题，另一个是历法中已知日法，求强弱二数。

百鸡问题最早见载于大约公元五世纪末成书的《张邱建算经》。题曰：“今有鸡翁一，直钱五；鸡母一，直钱三；鸡雏三，直钱一。凡百钱，买鸡百只。问鸡翁、母、雏各几何？”

北周甄鸾《数术记遗》(公元四世纪)载有百鸡类问题两问。其一：“今有鸡翁一只直五文，鸡母一只直四文，鸡儿一文得四只。今有钱一百文，买鸡大小一百只。问各几何？”其二：“今有鸡翁一只直四文，鸡母一只直三文，鸡儿三只直一文。今有钱一百文，还买鸡儿一百只。问各几何？”

南宋杨辉《续古摘奇算法》引《辩古通源》(已失传)百鸡类题一问：“钱一百买温柑、绿橘、扁橘共一百枚。只云，温柑一枚七文，绿橘一枚三文，扁橘三枚一文。问各买几何？”

上列百鸡类四问，除《张邱建算经》给出三组正整数解外，其余均只写出一组答案。关于百鸡题的解法，《张邱建算经》术文仅十五个字：“鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三。即得。”后人很难得其要旨，故“疑其从来脱漏阙文。”①

从现代数学的观点来分析，百鸡类问题相当于求解三元一次不定方程组

$$\begin{cases} nx+ky+\dfrac{1}{k}z=100 \\ x+y+z=100, \end{cases}$$

其中n，k为给定正整数。张邱建的术文给出翁、母、雏的增减率，

① 见宋元丰七年秘书省刻书时为《张邱建算经》添入谢察微术草之前的引言。

相当于指出由特解求通解的算法，即在$n=5$，$k=3$的情形，若得方程的一组整解x_0，y_0，z_0，则由

$$\begin{cases} x=x_0+4t \\ y=y_0-7t \\ z=z_0+3t \end{cases}$$

可求出方程的一切整解。一般认为术文缺少了求出一组整解x_0，y_0，z_0(即特解)的方法。作者在[16]中指出，古代百鸡类问题设问之数有两个特点：一是"百钱买百鸡(物)"；二是"鸡母一直k，鸡雏k直一。"由此推测宋以前的百鸡术必利用数据的特殊性质而巧妙求解，很可能是由下述简单有定问题演化而来："鸡母一直钱三，鸡雏三直钱一；百钱买百鸡。问各几何？"这很容易由中算家所擅长的比率算法[17]求解：

	鸡	钱
母	1	3
雏	3	1
总	4	4

以25遍乘各行 →

	鸡	钱
母	25	75
雏	75	25
总	100	100

得$y_0=25$，$z_0=75$。张邱建百鸡题之设问添加上"鸡翁一直钱五"，则答案需增加翁、雏，而减少鸡母之数，故问题的关键正在于求增减率，它亦容易由比率算法求得①。由于问题有显然之特解$x_0=0$，$y_0=25$，$z_0=75$，所以术文只须给出增减率，这大概是《张邱建算经》中术文如此简略的原因。

求强、弱之数的问题产生于调日法的应用。调日法为刘宋时代何承天（于公元五世纪）所创。《宋史·律历志》称："调日法，……宋世何承天更以四十九分之二十六为强率，十七分之九为弱率，于强弱之际以求日法。承天日法七百五十二，得一十五强一弱。自后治历者莫不因承天法累强弱之数。"周琮《明天历》（公元1064年）是我国古代流传至今有关调日法的最早文献。南宋李心传《建炎以来朝野杂记》乙集（公元1216年）卷五有关于调日法稍为

① 参见文献[16]。

详细的记载。其后，秦九韶《数书九章》卷三“治历演纪”(公元1247年)更给出调日法在制历中结合历元推算应用的实例①。以上记述表明，自何承天以后八百余年间，调日法在历法中得到普遍应用。作者在[18]中推断，调日法作为分数近似法的发展，它是由通其率算法脱胎而来，大约在东汉刘洪时代已见萌芽，后为何承天所精密化而成定法。

“调日法”，它主要应用于确定日法、朔余②。刘洪之后，朔望月长度的测定已相当精确。到了南北朝时代，历算家通过长期观测的积累和分数近似法的应用[18]，而确定朔望月长度的分数部分当在强率$\frac{26}{49}$与弱率$\frac{9}{17}$之间。于是“累强弱之数”以得“中平之数”：$\frac{26m+9n}{49m+17n}$，这就是所谓的“调日法”术。例如上述文献所载，有关历法的日法、朔余由“调日法”而得如下：

何承天《元嘉历》：$\frac{26\times15+9\times1}{49\times15+17\times1}=\frac{399}{752}$；

王处讷《应天历》：$\frac{26\times201+9\times9}{49\times201+17\times9}=\frac{5307}{10002}$；

鲍澣之《开禧历》：$\frac{26\times339+9\times17}{49\times339+17\times17}=\frac{8967}{16900}$。

根据秦九韶的记述，其具体推算过程一般是先选定日法，例如开禧历“调得16900为日法”，由此计算强弱二数(m与n)，然后再定朔余。而求强、弱之数实为求解不定方程：

$$49x+17y=16900。$$

给定日法a，要求强弱之数，归结为解不定方程$49x+17y=a$，这类问题很可能在调日法时兴的南北朝时代便已提出。宋代以前如何求解无从查考。而细察秦九韶“治历演纪”题演草附图[16]，可知秦氏乃利用数据的巧合而给出特殊解法。迄今为止，我们还没有任何资料证实，直到秦九韶时代中算家曾采用大衍求一术来求

① 见李继闵：《秦九韶关于“调日法”的记述》。
② “调日法”，即调整“日法”数据之法。

强、弱之数。

钱宝琮[19]曾断言："张邱建、甄鸾、杨辉等先后提出了'百鸡问题'，明、清数学家还曾提出多于三元的'百鸡'类型的问题，但都没有给它一个一般的解法。到十九世纪，宋、元数学复兴以后，才有把这个类型的问题和求一术（一次同余式解法）结合起来的讨论。"如上所述，对于"求强弱之数"的问题也当有类似的论断。

在经过了四、五百年的低落与停滞之后，中国的一次不定分析的研究在十八世纪末以后的一百年间又兴起了高潮。这一时期的研究是受当时学术界古典考证风气的影响，主要围绕大衍求一术、百鸡术以及调日法的考释而发展起来的。其中主要是焦循、李锐、张敦仁、骆腾凤、丁取忠、时曰醇、黄宗宪等人的工作。他们一方面发展了张邱建百鸡术中的比率算法，创造了所谓"三色差分"、"四色差分"之术，使古代处理百鸡类问题的方法趋于系统和完整①；另一方面，将不定方程问题与同余问题结合起来，从而用求一术给出问题的一般解法，并进行了细致的讨论。这一时期遗留下来的有关著述十分丰富，不能一一列举，仅就有代表意义的学术成就略为概述。

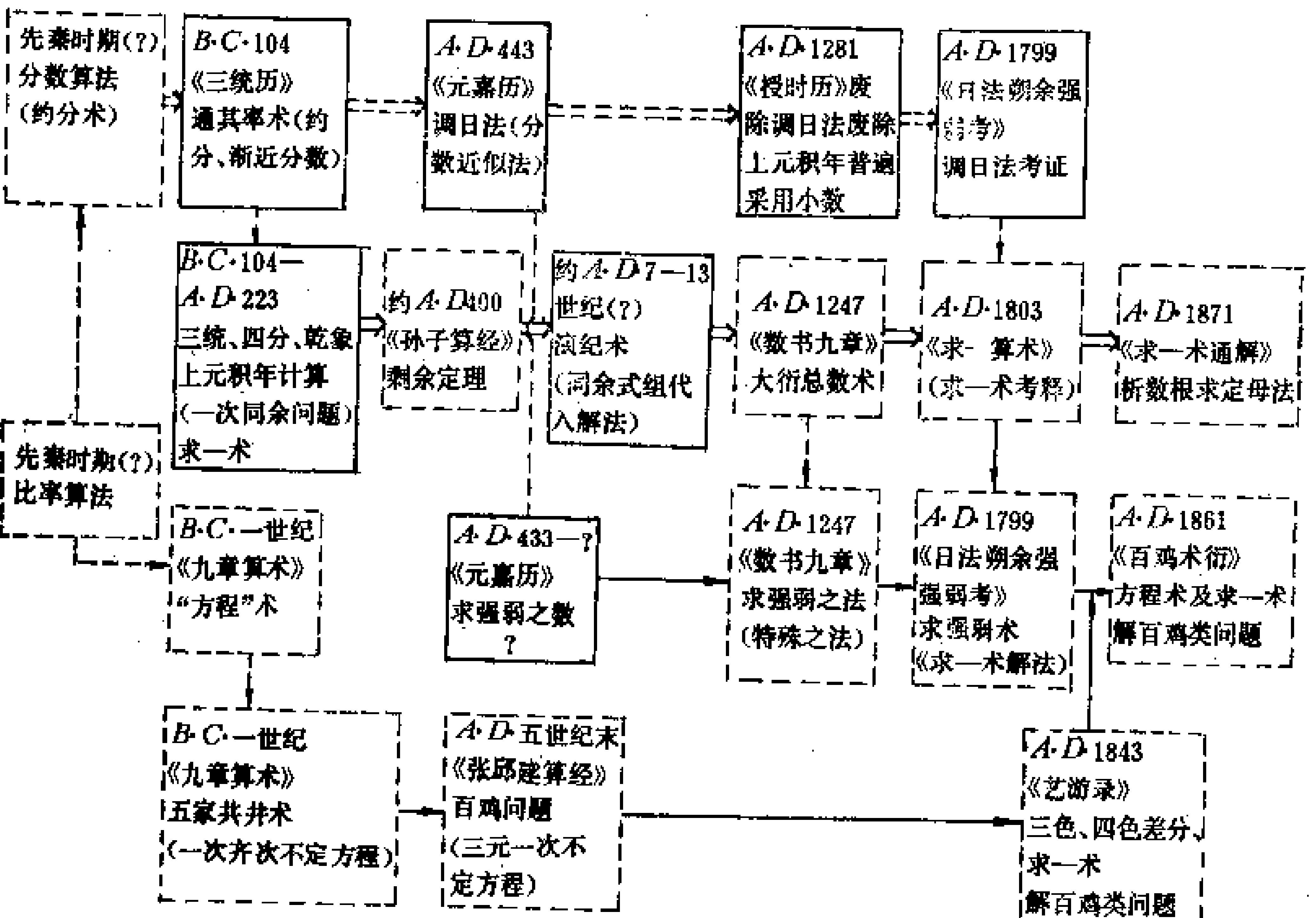
李锐《日法朔余强弱考》（公元1799年）"爰列开元占经、授时术议所载五十一家日法朔余之数，一一考其强弱"。在此基础上解释何承天"调日法"。其"求强弱之法"是现存中国历史文献中用求一术解一次不定方程问题的最早记载②。

张敦仁《求一算术》（公元1803年）阐述"大衍总数术"与"演纪术"十分详尽而对后世颇有影响。

骆腾凤《艺游录》（公元1843年），其卷下"衰分补遗"讨论百鸡类问题，它将差分算法与求一术结合起来，不仅给出问题的一般解法，而且还对正整数解的组数作了初步讨论。他关于不定方程

---

① 参见文献[16]。
② 参见文献[16]。



图注：(1)实线方框代表天文领域内的问题与成就，虚线方框则代表算术领域内的问题与成就。
(2)==➝表分数近似法之演进；⟹表求一术之演进；⟶表一次不定方程问题之演进，---➝表不同问题的联系。

通解的说明包含着不变量的观念，表现出深邃的数学思想①。骆氏的工作是富有创造性的。

丁取忠《数学拾遗》（公元1851年）另立"二色差分"之术解百鸡问题，接近张邱建设问造术之原意。

时曰醇《百鸡术衍》（公元1861年）集前人之大成，以方程术代替比率算法，改进"二色差分"术，并附求一术解法。他的《求一术指》（公元1870年前后）对大衍求一术也略有改进。

黄宗宪《求一术通解》（公元1871年）以"析各泛母为极小数根"②的方法改进了秦九韶化元数为定数的化约方法，使大衍总数术臻于完善。

综观中国古代一次不定分析发展的历史渊源，它涉及两个领域、三类问题、三条线索。两个领域是天文历法与算术，而主要在天文历法；三类问题是历元推算、共物共价（以百鸡问题为代表）和求强弱之数，而以历元推算为首要；三条线索是分数近似法、大衍求一术和百鸡术的演进，而以求一术为中心。总结上述，其发展演变的线索可以绘成如245页的简图。

（二）

中国不定分析的历史，有着与西方迥然不同的特点。

从汉代上元积年的推算到清末"求一"、"百鸡"诸术的研讨，一次不定分析问题在中国天算史上延绵不断，经历了整整两千年的历程。如此悠久的历史，在世界各国中大概是绝无仅有的。西方古代不定方程问题仅见于希腊时代丢番图的著作中。近代欧洲一次不定分析研究大约是在公元十五世纪以后。印度古代对于一次不定方程曾有过浓厚的兴趣，但它的盛行也只是在阿耶波多（Āryabhata，生于公元476年）以后的六、七百年间。中算家的一次不定

① 参见文献〔18〕。

② 即将各模数分解为素因子。

分析有这样长久的生命力，当然不能简单地归于"偏爱"与"兴趣"，必定有其特殊的历史背景，这就是它在古代历法的制定中有着重要的应用。

中国不定分析的主要成就来自历法推算，这是它的又一特点。历元推算与求强弱之数是古代不定分析的两大问题，在历法中至关紧要，大衍术的起落兴衰与之息息相关。汉历上元积年计算提出了一次同余问题，于是求一术应运而生。魏晋以后追求理想上元，需要处理更为复杂的一次同余式组问题，中算家又创造了"剩余定理"与"演纪之术"，十三世纪的秦九韶在此基础上做出精采的总结。元代《授时历》废弃上元积年，从此大衍术五百年无人问津，几成绝学，直到十八世纪末年古典考证之风兴起才被重新发掘出来。中国传统数学具有浓厚的应用数学的色彩，古典数学文献都以问题解答的体例编纂。一次同余问题是描述周期现象的数学模型，在古代社会生产与科学实验的活动中，除了历元推算之外确实很难再找到它的用武之地①。因而，在秦九韶以前，除《孙子算经》作为数学游戏通俗浅显地加以普及之外，历法中关于一次同余问题的许多重大成就在千余年的漫长时期内没有在数学著作中得到整理与推广。当然产生这种现象的历史原因可能是多方面的。秦九韶在论及数术源流时写道："今数术之书，尚三十余家。天象历度，谓之缀术，太乙壬甲，谓之三式，皆曰内算，言其秘也。九章所载，即周官九数。系于方圆者为重术，皆曰外算，对内而言也。"② 可见古代在历法神秘主义的束缚下，天文历法数据及其计算方法和星象占卜一样被涂抹上神圣的色彩，自然不会轻易载于算书而公诸于世的。这也可能是大衍术在古代文献中鲜有记述的另一个原因。所以后世只有通过对历法的细心考究才能了解各

---

① 秦九韶曾煞费苦心力图把求一术用于历法之外的实际问题，但他的推计土功、余米推数等几问都是闭门造车，脱离实际，甚至是荒诞不经的。

② 沈括《梦溪笔谈》卷十八中也有类似记述。然"重术"一词胡道静《梦溪笔谈校证》校改为"曹术"。

种数据与算法的来由。

从理论结构的角度来看中国不定分析的特点，剩余问题与不定方程两个方面发展的不平衡性是十分明显的。无论就应用的广泛和理论的水平来说，前者都占有显著的优势，以致某些数学史著作把中国的不定分析就称为“大衍术”。如前所述，至迟在公元三、四世纪，中算家处理一次剩余问题的方法已经完全成熟，剩余定理的发明就是一个标志。但是，正如钱宝琮所指出，直到十九世纪以前中算家的一次不定方程研究仍处在特殊的算术解法的水平。在西方数学输入中国以前，在传统数学中，剩余问题与不定方程问题似乎是彼此孤立地发展，从现存文献的清理来看，把二者联系起来用求一术解一次不定方程只是清代中期以后的事。这个历史事实常常使人迷惑不解和引起某些论著中的混乱。因为从现代数学的观点来看，一次不定方程问题与一次同余问题是完全等价的。但是没有任何根据说明清代以前的中国学者已认识到这两类问题的逻辑联系；相反，甚至象秦九韶这样精通大衍术的数学大师在求强弱之数时也不曾用求一术给出一般解法。这种情形通常都归咎于中国传统数学没有一套适于表达与推理的符号体系，而我们认为更主要的是由于中国古代一次不定分析有着不同于现代的理论根源。

从数学内部的理论渊源来看，中国不定分析的特征是它发端于古老的分数与比率算法。中国天算之特长在于计算。古代历法的数据基本上都用分数表示，因而分数算法是历法中一个重大项目。远在《九章算术》成书之前，中算家已经建立了系统的分数理论[20]，约分、通分及四则运算都已有了完整的法则，历算家为了简化与调整天文数据，无疑要大力发展分数近似值的计算方法。因而，西汉历法家由约分术演化出渐近分数算法——“通其率”术是可以理解的。严敦杰[21]早就指出：“中国古代数学家研究近似值的成就，首先是‘求一术’的发明。”李倍始（U. Libbrecht）[22]也推测中国的大衍术可能与连分数算法有关。仅就演算程序而言，汉代“通

其率"与欧洲近代的连分数算法别无二致，但中算家的通其率是以比率概念为基础并且与连分数有完全不同的表达形式[①]。渐近分数的研究必然引导出"求一术"的发现和"调日法"的产生。因为，求一术事实上是渐近分数列一个简单性质的应用；而渐近分数列的递推演算程序容易引导出带权加成法则，即调日法的产生。当然，由通其率衍生出求一术和调日法不仅是数学内部逻辑发展的必然，而且还可以在古代历法中找到一些佐证。中国古代一次不定方程问题长期处于特殊的算术方法求解的阶段决不是偶然的。虽然早在《九章算术》中便已有了处理一次方程组问题的"方程"术，但是古代的"方程"概念中并没有明确的未知量与已知量的区分，不能等同于现代数学中的equation（含有未知量的等式），更不用说符号代数的演算法则了。中国古代的"方程"基于比率概念[②]，因而中算家以传统的比率算法来处理一次不定方程问题是顺理成章的事。这种方法从张邱建开始，直至清代焦循、骆腾凤、丁取忠等人所谓的"差分"（或"衰分"）之术，事实上都是对古代比率算法的继承与发展。

从数学方法的表达形式来看，中算家的不定分析充分表现出古代筹算程序化的独特风格。中国传统数学以"筹"为工具。筹算的优点在于可随意摆弄，便于变换。与此相适应，古代算法常常利用筹在算板上不同的相对位置关系构成特定的数学模式，并规定相应的演算程序。中算家的这种筹式算法的设计能力，早在《九章算术》的"盈不足"、"方程"诸术中就已有了出色的表现[③]，在大衍术中更有所创新。秦九韶关于大衍总数术的设计，在算法上有很高的成就。其化约元数为定数的方法在没有素数概念的历史条件下是难能可贵的[④]，而以奇、定二数求乘率的循环递推程序（即

① 在这种意义上，说"通其率"即连分数算法是不妥的。

② 参见《〈九章算术〉与刘徽》（北京师范大学出版社，1982年）一书中作者的有关文章。

③ 参见《〈九章算术〉与刘徽》一书中，作者的有关论文。

④ 参见文献〔14〕。

大衍求一术)设计科学而严谨，至今无可指谪。李锐关于"调日法术"与"求强弱术"的演算程序更是推陈出新。过去，中国传统数学的"算法"表述形式常被误解为缺乏理论，其实，任何完整系统的算法都是以一定的理论为指导的。中国古代数学往往"寓理于算"，它的理论蕴涵于算法之中。以《九章算术》为代表的算书体例，没有容纳阐发算理的篇幅，许多重要的数学原理与精湛的数学思想都是通过后人的注释才得到简要的说明。大衍总数术与演纪之法处理十分复杂的一次同余式组问题，不仅层次井然，而且解法的原理与思路清晰可辨，可以说是寓理于算的一个典型。

如上所述，中算家的不定分析在学术源流与理论特色方面都表现出明显的继承性与独创性。但是，还应看到它也有其自身的局限性。中算重应用、轻理论，长于计算而疏于推理，因而在古典数学著作中很少进行纯粹理论的深入探讨。中国不定分析如此悠久而又迂回曲折，以及发展的不平衡性应当说是这种局限性的反映。

在这篇文章里，我们仅就现存的中国古代文献来进行分析，而没有考察中国与外域的学术交流。由于史料的限制，要对这一问题做出有根据的论断是困难的。我们并不排斥在这方面中外之间，特别是中国与印度之间历史上曾有过相互的交流与影响。但是，这些因素无论如何不会改变前面我们对中国不定分析历史所作的基本论述。

最后，让我借用李约瑟(J. Needham)博士[25]的一段话来作为本文的结尾："我们最后的结论大概是这样：中国和它的西方邻国以及南方邻国之间的交往和反应，要比一向所认为的多得多，尽管如此，中国思想和文化模式的基本格调，却保持着明显的、从未间断的自发性。这是中国'与世隔绝'的真正涵义。过去，中国是和外界有接触的，但是，这种接触从来没有多到足以影响它所特有文化以及科学的格调。"

参 考 文 献

〔1〕李继闵：《刘徽对整勾股数的研究》，《科技史文集》第8辑，上海科技出版社，（1982年）。
〔2〕新城新藏：《东洋天文学史研究》，沈璇译，中华学艺社出版，（1933年）。
〔3〕李文林、袁向东：《论汉历上元积年的计算》，《科技史文集》第3辑，上海科技出版社，（1980年）。
〔4〕李文林、袁向东：《中国古代不定分析若干问题探讨》，《科技史文集》第8辑，上海科技出版社，（1982年）。
〔5〕吕子方：《三统历历意及其数源》，《自然辩证法学术研究》（第四辑），中国科学院成都分院自然辩证法研究室编印，（1980年）。
〔6〕华罗庚：《中国数学会第一次全国代表大会闭幕词》，（1951年8月19日）。
〔7〕毕剑横：《吕子方及其〈中国科学技术史论文集〉》，《自然辩证法研究通讯》，（1983年，No.1）。
〔8〕李继闵：《"通其率"考释》，《中国数学史论文集》（一），山东教育出版社，（1985年）。
〔9〕李继闵：《"其率术"辨》，《中国数学史论文集》（一），山东教育出版社，（1985年）。
〔10〕李继闵：《"大衍求一术"溯源》，本书。
〔11〕李文林、袁向东：《中国剩余定理》，《中国古代科技成就》，中国青年出版社，（1978年）。
〔12〕钱宝琮主编：《中国数学史》，科学出版社，（1964年）。
〔13〕钱宝琮：《孙子算经提要》，《算经十书》，中华书局，（1963年）。
〔14〕李继闵：《从"演纪之法"与"大衍总数术"看秦九韶在算法上的成就》，本书。
〔15〕三上义夫著，林科棠译：《中国算学之特色》，商务印书馆，（1934年）。
〔16〕李继闵：《"百鸡术"之演进》，待发表。
〔17〕李继闵：《〈九章算术〉中的比率理论》，《〈九章算术〉与刘徽》，北京师范大学出版社，（1982年）。
〔18〕李继闵：《"调日法"源流考》，第三届中国科学史国际讨论会论文，（1984年8月，北京）。
〔19〕钱宝琮：《中国数学史话》，中国青年出版社，（1957年）。
〔20〕李继闵：《中国古代的分数理论》，《〈九章算术〉与刘徽》，北京师范大学出版社，（1982年）。
〔21〕严敦杰：《中国古代的数学成就》，中华全国科学技术普及协会出版，

(1956年)。
〔22〕 U. Libbrecht: 《Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, the Shu-Shu Chiu-Chang of Ch'in Chiu-Shao》, (MIT. 1973).
〔23〕 李继闵：《略论〈九章算术〉理论体系之特色》,《〈九章算术〉与刘徽》, 北京师范大学出版社, (1982年)。
〔24〕 李继闵：《〈九章算术〉与刘徽注中的“方程”理论》, 《〈九章算术〉与刘徽》, 北京师范大学出版社, (1982年)。
〔25〕 J. Needham: 《Sciense and Civilisation in China》. (Cambridge. 1959).
〔26〕 钱宝琮：《古算考源》, 商务印书馆出版, (1933年)。
〔27〕 李　俨：《中算史论丛》, 科学出版社, (1954年)。
〔28〕 钱宝琮等：《宋元数学史论文集》, 科学出版社, (1966年)。
〔29〕《历代天文律历等志汇编》, 中华书局, (1976年)。
〔30〕《算经十书》, 钱宝琮校点, 中华书局, (1963年)。
〔31〕 秦九韶：《数书九章》, (1247年)。
〔32〕 宋景昌：《数书九章札记》, (1842年)。
〔33〕 沈　括：《梦溪笔谈》, (1086—1093年)。
〔34〕 杨　辉：《续古摘奇算法》, (1275年)。
〔35〕 方中通：《数度衍》, (1661年)。
〔36〕 程大位：《算法统宗》, (1593年)。
〔37〕 周　密：《志雅堂杂钞》, (1290年)。
〔38〕 严　恭：《通原算法》, (1372年)。
〔39〕 周述学：《神道大编·历宗算会》, (1558年)。
〔40〕 焦　循：《里堂学算记》, (1798年)。
〔41〕 李　锐：《李氏算学遗书》, (1803年)。
〔42〕 张敦仁：《求一算术》, (1803年)。
〔43〕 骆腾凤：《艺游录》, (1843年)。
〔44〕 丁取忠：《数学拾遗》, (1851年)。
〔45〕 时日醇：《百鸡术衍》, (1861年)。
〔46〕 黄宗宪：《求一术通解》, (1871年)。
〔47〕 华世芳：《恒河沙馆算草》, (1885年)。
〔48〕 知　弥：《不定方程解法十三式》, (1870年)。
〔49〕 何维棣：《百鸡术演代》, (抄本)。
〔50〕 陈贤佑：《增补百鸡术衍》, (1899年)。
〔51〕 陈志坚：《演无定方程式》, (1904年)。
〔52〕 张世尧：《无定方程式细草》, (1910年)。

库塔卡与大衍求一术

沈 康 身

一、库 塔 卡

求一次不定方程

$$ax+c=by \qquad (*)$$

(其中a, b为正整数$a>b$, $(a, b)=1$, c为整数)的正整数解，印度人称为库塔卡(Kuttaka)，此系梵文音译，义：碾细。印度传统解法是把a，b两数相当于用辗转相除法互除，使余数愈除愈小，从而设法求解。印度数学家圣使(Arya Bhata)于公元499年著有文集凡四章：十节诗、数学、时间计算、天球。其数学章由三十三节组成，最后二节即第32、33两节为押韵诗句、自称库塔卡，论一次不定方程。有人说库塔卡是圣使一生中对纯数学最大的贡献①，只是诗句太短，语焉不详，经门人弟子以及后代一再补充、注释，其义始显，其立术已成为印度传统数学重要组成部分。

婆什迦罗一世(Bhaskara I，公元525年时人)是圣使及门弟子，他用文字解释库塔卡。近人达生氏(B. Datta)用近代通用数学语言说明②，说圣使原始材料提出的问题是："求一数N，以除数a除、余R_1，以除数b除、余R_2，这就是

$$N=ax+R_1=by+R_2$$

---

① C. N. Srinivasiengar, 《The History of Ancient Indian Mathematics》, 1967, P. 96.

② B. Datta, "Elder Aryabhata's Rule for the Solution of Indeterminate Equations of the First Degree", 《Bulletin of the Calcutta Mathematical Society》, vol. 24, 1932, pp. 35—53.

当$R_1>R_2$，$R_1-R_2=c$.

问题就归结为求不定方程（*）的正整数解。"

《圣使文集》数学章库塔卡原文是：

RESIDUAL PULVERISER

अधिकाग्रभागहारं छिन्द्यादूनाग्रभागहारेण ।
शेषपरस्परभक्तं मतिगुणमग्रान्तरे क्षिप्तम् ॥ ३२ ॥

अधउपरिगुणितमन्त्ययुगूनाग्रच्छेदभाजिते शेषम् ।
अधिकाग्रच्छेदगुणं द्विच्छेदाग्रमधिकाग्रयुतम् ॥ ३३ ॥

图 1

译 文：

32节 对应于较大余数（R_1）的除数（a）被对应于较小余数（R_2）的除数（b）除，所得余数（r_1）又与对应于较小余数的除数（b）除。〔照此继续进行除法运算，余数渐小。其最后余数r_m应乘一任择之数（t）使乘积加上（如商的序号m为奇），或减去（如商的序号m为偶）原来余数之差（$R_1-R_2=c$）适为倒数第二个余数（r_{m-1}）所整除，记商为q。把互除所得各商数（q_1，q_2，…，q_m）依次排成一列，再在其末尾添上所选定的乘数t，最后记上刚才被倒数第二个余数整除的商q〕①。

33节 〔在这一列数中〕自下〔倒数第二个〕乘上面一个，加下面一个。〔重复这一手续，用较大余数对应的除数（a）来除所得最后一数（y），其余数乘以较小余数所对应的除数（b）加上较小余数R_2，结果就是对应于二除数的所求数（N）〕。

后人又进一步解释②。对方程（*）中二系数a，b用辗转相除法所得商及对应的余数如为

① 方括号内文字系后人补充、注释，可见圣使原文极为简陋，隐晦难晓。

② 这种解释最先见于达生氏专著《印度数学史》卷2。（B. Datta, History of Hindu Mathematics vol. 2, 1939）.

$$q_1, \quad q_2, \quad \cdots, \quad q_m; \quad r_1, \quad r_2, \quad \cdots, \quad r_m.$$

这些除法运算可以做到最后 $r_{m-1}=1$，$r_m=0$；或到某一步为止，各数之间的关系是

$$a=bq_1+r_1$$
$$b=r_1q_2+r_2$$
$$r_1=r_2q_3+r_3$$
$$\cdots$$
$$r_{m-2}=r_{m-1}q_m+r_m.$$

把a值代入(*)式，得$by=(bq_1+r_1)x+c$，这就是

$$y=q_1x+y_1 \quad (1)，其中 \quad by_1=r_1x+c \quad (1.1)$$

同样把b值代入(1.1)得$y_1(r_1q_2+r_2)=r_1x+c$，整理为

$$x=q_2y_1+x_1 \quad (2)，其中 \quad r_1x_1=r_2y_1-c \quad (2.1)$$

继续作类似代换，可得一系列递推公式：

$$y_1=q_3x_1+y_2 \quad (3), \qquad r_2y_2=r_3x_1+c \quad (3.1)$$
$$x_1=q_4y_2+x_2 \quad (4), \qquad r_3x_2=r_4y_2-c \quad (4.1)$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$y_{n-1}=q_{2n-1}x_{n-1}+y_n \quad (2n-1) \qquad r_{2n-2}y_n=r_{2n-1}x_{n-1}+c \quad (2n-1.1)$$
$$x_{n-1}=q_{2n}y_n+x_n \quad (2n) \qquad r_{2n-1}x_n=r_{2n}y_n-c \quad (2n.1)$$
$$y_n=q_{2n+1}x_n+y_{n+1} \quad (2n+1) \qquad r_{2n}y_{n+1}=r_{2n+1}x_n+c \quad (2n+1.1)$$

然后我们分两种情况讨论

1.1 a，b辗转相除到余数$r_m=0$。

1.1.1 商的序号m为奇数，即：$m=2n+1$。

$$r_{m-1}=r_{2n}=1, \qquad r_m=r_{2n+1}=0,$$

从$(2n+1)$，$(2n+1.1)$两式得：

$$y_n=q_{2n+1}x_n+y_{n+1}，而$$
$$y_{n+1}=r_{2n+1}x_n+c=c。$$

估计（即《圣使文集》数学章第32节所说任择之数 t ）x_n[①]就得到 $y_{n+1}=q=c$，借此从$(2n)$式开始可以自下而上递推，直到求出x，y值，从而也求出所求数N。

1.1.2　商的序号m为偶数，即$m=2n$，

$$r_{m-1}=r_{2n-1}=1,\quad r_m=r_{2n}=0。$$

从$(2n)(2n.1)$两式可得

$$x_{n-1}=q_{2n}y_n+x_n$$

$$x_n=r_{2n}y_n-c=-c$$

同样可任选y_n为某一整数t，即得 x_{n-1}，借此从$(2n-1)$式开始从下而上递推直到求出x，y。

1.2　a，b辗转相除到某一余数r_m。

1.2.1　商的序号为奇数，$m=2n+1$。

$$y_n=q_{2n+1}x_n+y_{n+1}，而$$

$$r_{2n}y_{n+1}=r_{2n+1}x_n+c,$$

选择　$x_n=t$　使$y_{n+1}=(r_{2n+1}t+c)/r_{2n}$

为正整数q，再逐次自下而上递推到求出x，y。

1.2.2　商的序号为偶数$m=2n$

$$\because\quad r_{2n-1}x_n=r_{2n}y_n-c,$$

选择　$y_n=t$，使　$x_n=(r_{2n}y_n-c)/r_{2n-1}$为正整数，设为$q$，就同样可逐次递推出$x$，$y$。

例1　$137x+10=60y$。

这里$a=137$，$b=60$，$c=10$，辗转相除得

$$q_1=2,\quad q_2=3,\quad q_3=1,\quad q_4=1,\quad q_5=8;$$

$$r_1=17,\quad r_2=9,\quad r_3=8,\quad r_4=1,\quad r_5=0。$$

从情况1.1.1

$y_2=q_5t+10=8t+10$，t可以随意选，如$t=1=x_2$

得　$y_2=18$，于是从下而上递推依次得

---

① 这里$r_{m-1}=r_{2n}=1$，因此$x_n=t$可以选用任意正整数。

$$y=q_1x+y_1=2\times 130+37=297,$$
$$x=q_2y_1+x_1=3\times 37+19=130,$$
$$y_1=q_3x_2+y_2=1\times 19+18=37,$$
$$x_1=q_4y_2+x_2=1\times 18+1=19,$$
$$y_2=18,$$
$$x_2=1。$$

印度人民习惯把上面运算排成图式：

q_1	2	2	2	2	297……y
q_2	3	3	3	130	130……x
q_3	1	1	37	37	………y_1
q_4	1	19	19	…	………x_1
q_5	8	18	…	…	………y_2
t	1	1	…	…	………x_2
q	10				

如t改选为0，2；x，y将依次为70，160；190，434，而

$$x\equiv 130\equiv 70\equiv 190\equiv 10(\bmod 60)$$
$$y\equiv 297\equiv 160\equiv 434\equiv 23(\bmod 137)$$

这就是《圣使文集》数学章第33节后半段所说求出x，y后还须进行的同余运算，以获得(*)式的最小正整数解。

例2 例1如辗转相除到$r_3=8$为止，按照情况1.2.1，

$$qr_2=tr_3+10,$$

为使$q=\dfrac{8t+10}{9}$为整数，就取$t=1$，$q=2$，照例1图式

q_1	2	2	2	23……y
q_2	3	3	10	10……x
q_3	1	3	3	………y_1
t	1	1	…	………x_1
q	2	…	…	………y_2

例3 印度公元八世纪数学家大雄（Mahavira）在其文集第4章对库塔卡有新见：

1. 略去q_1这一项，求出x后，代入(*)式以求y。

2. 余数做到$r_m=1$为止(按即$r_{m+1}=0$)。他举的例是

$$63x+7=23y,$$

这里 $a=63$，$b=23$，$c=7$。

经辗转相除得

$$q_1=2 \quad q_2=1 \quad q_3=2 \quad q_4=1 \quad q_5=4$$

$$r_1=17 \quad r_2=6 \quad r_3=5 \quad r_4=1 \quad r_5=1$$

由于余数序号为奇，正是情况1.2.1，那么

$$r_4q=r_5t+c, \quad 取 t=1$$

$q=8$，略去q_1所取图式是

q_2	1	1	1	1	51
q_3	2	2	2	38	38
q_4	1	1	13	13	
q_5	4	12	12		
t	1	1			
q	8				

得 $x\equiv51\equiv5(\text{mod}23)$代入原方程$y=14$。

印度在数学家圣使以后各大家都有类似问题，如

例4 一数为8除余5，为9除余4，为7除余1，求此数。(婆什迦罗一世)

例5 自从六星会元①以来，日、月、火、水、木、土六星回转整数次以外，又经过以下天数：

星名	日	月	火	水	木	土
天数	1000	41	315	1000	1000	1000

已知日每1095天回转三次，月137天转五次，火星685天一次，

① 会元，指诸星适在同一向径上。

水星1096天十三次，木星10960天转三次，土星10960天转一次。问六星会元以来已经过多少天？（梵藏Brahmagupta，公元628年时人。）

例6 一数被十六个数乘，这十六个数中以35为最小数，其他依次增3。乘后又分别为十六个数除，其中以32为最大，其他依次减2。这十六个除法中第一个得余数1，其他余数依次增3，求此数（大雄）。

例7 一数分别为6、5、4、3除，依次得余数5、4、3、2，求此数（作明，即婆什迦罗二世Bhaskara Ⅱ，1114约—1183）。

对于这些形如

$N=a_1x_1+R_1=a_2x_2+R_2=a_3x_3+R_3=\cdots\cdots=a_nx_n+R_n$ 的不定方程组解法，先在

$$a_1x_1+R_1=a_2x_2+R_2$$

中求出x_1的最小正整数解α，于是$N=a_1\alpha+R_1$，而其一般解是

$$N=a_1(a_2t+\alpha)+R_1=a_1a_2t+a_1\alpha+R_1，\text{那么}$$

$$N=a_1a_2t+(a_1\alpha+R_1)=a_3x_3+R_3$$

归结为再做一次库塔卡，照此方式一直运算到解出x_n，从而获得N值。

二、大衍求一术

我国古代因天文历法推算上元积年的需要具备了解同余式的客观条件。西汉末年刘歆将汉武帝元封7年（前104年）开始施行的《太初历》改编为《三统历》时，首次引进作为历法时间原点——上元①新概念。为推算上元积年应有同余式知识，所以中国研究同余式的历史可以上溯到汉时（前206到公元220）②。

---

① 见本书"《数书九章》中的天文问题"第5节。

② 李文林、袁向东，"中国古代不定分析若干问题探讨"，《科技史文集（8）》，上海科技出版社，1982年，106—122页。

我国重要数学经典《孙子算经》钱宝琮氏断为公元400年前后著作[1]，卷下第26题为"今有物不知数"题，算经作者完整地作出解题步骤及答案。题文相当于说求解同余式组

$$x\equiv 2(\mathrm{mod}3)\equiv 3(\mathrm{mod}5)\equiv 2(\mathrm{mod}7)$$

术文提出解题关键是要找辅助系数F_1，F_2，F_3使分别满足同余式

$$35F_1\equiv 1(\mathrm{mod}3),$$

$$21F_2\equiv 1(\mathrm{mod}5),$$

$$15F_3\equiv 1(\mathrm{mod}7)。$$

心算可得$F_1=2$，$F_2=1$，$F_3=1$，因此所求数是

$$x\equiv 2\times 2\times 35+2\times 1\times 21+2\times 1\times 15\equiv 233\equiv 23(\mathrm{mod}105)$$

算经作者提出的虽是特殊问题，但具有一般意义。

我国解同余式

$$ax\equiv 1(\mathrm{mod}b)\quad (a,\ b)=1 \qquad (**)$$

的系统研究是从南宋秦九韶开始的。对于形如(**)的同余式秦氏首创大衍求一术，提出一般解法，井然有序。称a为衍数，b为定母，称(**)的解为乘率。当$a>c$时，取$a'\equiv a(\mathrm{mod}b)$，其中$0<a'<b<a$，并认为$a'x\equiv 1(\mathrm{mod}b)$与(**)同解。秦氏称$a'$为奇数，说："诸衍数各满定母去之，不满曰奇。以定与衍，用大衍求一入之，以求乘率，"就是这个意思。《数书九章》卷1第1题所列大衍求一术虽然叙述非常简洁，但在这第1题和卷3第3题有关草文俱有用此术运算过程实录，因此后人易于洞察原义，其程序如下：

2.1 "置奇(a)右上，定(c)居下，立天元一($J_1=1$)于左上。"

2.2 "先以右上除右下($c\div a$)，所得商数(q_2)与左上一相生($q_2J_1=J_2$)，入右下。"

---

[1] 钱宝琮校点本《算经十书·孙子算经》提要，1962。

2.3 “然后乃以左行上(a)，下(r_2)，以少除多，递互除之($r_3=a-q_3r_2$)。所得商数(q_3)随即递互累乘($q_3J_2+J_1=J_3$)，归左行上(J_3)下(J_2)。”

2.4 以后就重复程序2.3例如

$$r_4=r_2-q_4r_3,\quad q_4J_3+J_2=J_4,\cdots\cdots。$$

2.n “须使右上末后奇一而止，乃验左上所得以为乘率。”这是说，按程序2.3重复运算，直至右上余数得一（$q_n=1$，n 为单数)为止。并认为它所对应的$J_n=q_nJ_{n-1}+J_{n-2}$就是(**)的解，秦氏筹算解(**)全过程可图式为：

$$\begin{cases} 365\dfrac{4108}{16900}N = 60p + 11\dfrac{7540}{16900}, \\ 365\dfrac{4108}{16900}N = 29\dfrac{8967}{16900}q + 9\dfrac{11671}{16900}. \end{cases}$$

秦九韶化为同解的同余式组

$$6172608N \equiv 193440 (\mathrm{mod}\, 60 \times 16900) \equiv 163771 (\mathrm{mod}\, 499067).$$

把左端同余式化为

$(365 \times 16900 + 4108) \times 60n \equiv 193440 (\mathrm{mod}\ 60 \times 16900)$，其中 $(4108,\ 193440,\ 16900) = 52$，于是

$$79n \equiv 62 (\mathrm{mod}\ 325)$$

秦氏先对 $79n' \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 325)$ 求出乘率 $n' = 144$，再计

$$n \equiv 62 \times 144 \equiv 153 (\mathrm{mod}\ 325)$$

因此　　$N \equiv 9180 (\mathrm{mod}\ 19500)$，

这就是　　$N = 19500t + 9180$，代入右端同余式，秦氏至此相当于获取

$$377873t \equiv 188578 (\mathrm{mod}\ 499067).$$

《数书九章》对于解

$$377873t \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 499067)$$

在本题草文中列有大衍求一术全部筹算图式，我们改用阿拉伯数字照录如下：

J_1 1	a 377873
	b 499067
	q_2 1

	q_3 3
J_1 1	a 377873
J_2 1	r_2 121194
	3

J_3 4	r_3 14291
J_2 1	r_2 121194
	q_4 8

	q_5 2
J_3 4	r_3 14291
J_4 33	r_4 6866

J_5 70	r_5 559
J_4 33	r_4 6866
	q_6 12

	q_7 3
J_5 70	r_5 559
J_6 873	r_6 158

J_7 2689	r_7 85
J_6 873	r_6 158
	q_8 1

	q_9 1
J_7 2689	r_7 85
J_8 3562	r_8 73

J_9 6251	r_9 12
J_8 3562	r_8 73
	q_{10} 6

	q_{11} 11
J_9 6251	r_9 12
J_{10} 41068	r_{10} 1

	q_{11} 11
J_{11} 457999	r_{11} 1
J_{10} 41068	r_{10} 1

演算至此，原文说：“得……因数(乘率)四十五万七千九百九十九。”

秦氏大衍求一术虽曾失传五百多年，经有清一代的研究，特别是黄宗宪《求一术通解》(1874)的解释，把秦氏术中筹算记数位置“左右上下”改为“上下左右”，并在竖直方向连续记载结果，笔算称便。在《求一术通解》中黄宗宪认为：“列定母(b)于右行，列衍数(a)于左行，辗转累减，至衍数余一为止，视左角上寄数为乘率。”他为寄数求法作出三条明确的规则，相当于秦氏术程序2.1至2.3：

规则一：a的寄数是1，b的寄数是零，把a的寄数作为余数r_1的寄数，(2.1)。

规则二：做第二次减损，这次累减次数q_2作为r_2的寄数，(2.2)。

规则三：做第三次减损，得余数r_3。第三次减损累减次数q_3与r_2寄数q_2的乘积加上r_1的寄数作为r_3的寄数，(2.3)。

依次类推，一般说：做第m次减损，得余数r_m，r_m的寄数等于第m次减损累减次数q_m与r_{m-1}的寄数的乘积加上r_{m-2}的寄数，(2.4)。这种手续一直进行到左行最后余数$r_n=1$为止，那时r_n的寄数就是所求乘率，(2.n)。

例2 《求一术通解》卷上在解《数书九章》卷2第3题，“程行相及”时，关于解同余式

$$24x\equiv 1 \pmod{125}$$

黄宗宪所拟笔算图式用阿拉伯数字表示，当如：

J_1………………1	24
$+4\times5=20$	$-(4\times5=20)$
J_3………………21	4
$+3\times26=78$	$-(3\times1=3)$
J_5………………99	1

125	0……J_0
$-(5\times24=120)$	$+5\times1=5$
5	5……J_2
$-(1\times4=4)$	$+1\times21=21$
1	26……J_4

本例$r_5=1$，乘率即寄数$J_5=x=99$，所以黄宗宪也说：“其左角寄数九十九，即乘率。”

三、中、印两民族在同余式研究工作中的平行性

我们知道解不定方程 $ax+c=by$(*)与解同余式 $ax\equiv 1 \pmod b$(**)的意义是一致的。从历史发展看,《孙子算经》较《圣使文集》问世约早一百年，而后者所论库塔卡确是解(*)式的一般方法，但由于可征文献过于简略，经历代一再注释，特别是本世纪达生氏用现代数学语言描述，人们才知其用意。《孙子算经》物不知数题术文虽是对特定算题而言，但从中不难推衍为一般解法，而且中国同余式问题的提出与解决可以延及两汉，这又是中国不定分析的另一特色。

中、印两民族都对同一数用不同除数，从所除得不同余数引出问题，情节非常相象，特别是梵藏命题六星会元(本文第1节例5)与秦九韶命题治历演纪(本文第2节例2)都以天文数据入算，问题结构又相一致。印度库塔卡，义：碾细；中国大衍求一术："以少除多，递互除之"，所用工具同是辗转相除算法。在解题步骤上则中、印迥异，而在某些细节上如《数书九章》卷3治历演纪题又采用逐步消元适又与印术合拍。以上各种现象都是中、印数学发展中平行性的突出惹眼之处。

印度大雄氏对库塔卡所提新见二则(本文第1节例3)尤饶兴味，如此术施于

$$ax-1=by$$

则等价于同余式(*)，且库塔卡与大衍求一术将完全一致，在商数序列(设序号n为偶)之后，我们任择$t=1$，而$c=-1$，那么

$$t+c=0,$$

即

$$q=0,$$

因此库塔卡和大衍求一术序列应分别是：

m	序列(1) 库塔卡(K_m)	序列(2) 库塔卡(K_m)	序列(3) 大衍求一术(J_m)
0	q_2	0	0
1	q_3	1	1
2	q_4	q_n	q_2
3	q_5	q_{n-1}	q_3
⋮	⋮	⋮	⋮
i	q_{i+2}	q_{n+2-i}	q_i
⋮	⋮	⋮	⋮
$n-3$	q_{n-1}	q_5	⋮
$n-2$	q_n	q_4	⋮
$n-1$	1	q_3	q_{n-1}
n	0	q_2	q_n

序列(1)：自下而上：商数"乘上面一个，加下面一个"运算 ↑

序列(2)：自上而下：商数"乘下面一个，加上面一个"运算 $K_m=q_mK_{m-1}+K_{m-2}$，$K_1=1$，$K_0=0$ ↓

序列(3)：$J_m=q_mJ_{m-1}+J_{m-2}$，$J_1=1$，$J_0=0$ ↓

序列(1)、序列(2)等价这是显然的。序列(2)、序列(3)运算结果也是等价的。

$$K_0=0,\qquad J_0=0$$

$$K_1=1,\qquad J_1=1$$

$$K_2=q_n,\qquad J_2=q_2$$

$$K_3=q_{n-1}K_2+K_1=q_{n-1}q_n+1,\qquad J_3=q_3J_2+J_1=q_3q_2+1$$

……

$$K_i=q_{n+2-i}K_{i-1}+K_{i-2}\qquad J_i=q_iJ_{i-1}+J_{i-2}$$

……

$$K_n=q_2K_{n-1}+K_{n-2}\qquad J_n=q_nJ_{n-1}+J_{n-2}$$

我们来证明 $K_n=J_n$

先证对于 $2\leqslant j\leqslant n$ 都有

$$K_n=J_jK_{n-j+1}+J_{j-1}K_{n-j}$$

数学归纳法：$j=2$

$$K_n=q_2K_{n-1}+K_{n-2}=J_2K_{n-1}+J_1K_{n-2}，\text{上式成立}$$

如果 $j=i$ 时成立，那么 $j=i+1$ 也成立，因为

$$K_n=J_iK_{n-i+1}+J_{i-1}K_{n-i}$$

$$=J_i(q_{(n+2)-(n-i+1)}K_{n-i}+K_{n-i-1})+J_{i-1}K_{n-i}$$

$$=(J_i q_{i+1}+J_{i-1})K_{n-i}+J_i K_{n-i-1}$$
$$=J_{i+1}K_{n-i}+J_i K_{n-i-1}$$

特别是当$j=n$时

$$K_n=J_n K_1+J_{n-1}K_0=J_n \qquad 证毕[①]$$

中、印两民族在各自特定环境中发展包括数学在内的各种科学文化知识，虽然两民族所在时间、空间不同，但由于客观存在、物理模型、社会经济生活、生产需求关系一致，中印在数学发展中各种事项非常相象。当然中印人士假道丝绸之路密切接触也是一个重要因素。例如圣使故乡Pataliputra（今称Patna巴特那），唐玄奘《大唐西域记》(646)称华氏城，梵藏、婆什迦罗二世均居Ujain（乌贾因），《大唐西域记》则称乌苌，是唐玄奘等友好使者长期留学地，因此文化交流、截长补短、互通有无似为不可避免。关于不定分析问题中印互相影响，甚至师承关系问题，素为海内外学者关注。

上文已列举事实说明两民族在不定分析发展中许多平行处，但在算法上毕竟还有许多不相同处，从本文第1、2节可以明显看出，这对有些学者[②]的误解——中国大衍求一术源自印度，库塔卡是一恰当的鉴定根据。比利时东方学家李倍始氏(U. Libbrecht)在他的著作《十三世纪的中国数学》一书中为澄清事实真相，他提出鉴定的几点看法：

一、由于历史文献荡然无存，要依靠原始材料来证实，看来已不可能。

二、如果算法是由一方传给另一方，算题本身可以变更，如果算法本身也有所改动，那就非常罕见。

三、当坚持一种算法是从另一种算法推导而来，那么对两种算法当作认真分析，考察其中一方是否蕴含于另一方之中。

---

① 这一证明是同事王传国同志完成的。

② A. K. Bag, 《Mathematics in Ancient and Medievanl Indian》 1979, pp.215—216.

李倍始作结论说："我们不能接受中国大衍求一术与印度库塔卡有任何历史渊源关系"①，我们认为这一长期存在的问题，即中、印不定分析的历史渊源关系不宜急于作出结论。我们还应做大量工作，例如历史文献、地下文物有待进一步发掘，两民族社会、经济、交通、宗教关系有待深入分析了解，对不定分析的来龙去脉各自在理论上和实际计算方法上的相同处和不同处进行客观分析和比较。深信通过中、印文化和学术交流，这一个疑案最终会得到澄清。

① U. Libbrecht,《Chinese Mathematics in 13th Century》1973, p.366。

《丽罗娃底》与《数书九章》

沈　康　身

一、概　　说

十二、十三世纪时在欧洲，数学与其他科学同样处于休眠状态，在东方，数学学术发展则方兴未艾。印度与中国尤以数学名著《丽罗娃底》(Lilavati, 1150)、《数书九章》(1247)大放异采，举世瞩目。《丽罗娃底》系作明轨范师(Bhaskaracharya)简称作明(Bhaskara，音译婆什迦罗)作，他1114年生于碧嘉浦(Bijapur)，今属迈索尔(Mysore)邦。丽罗娃底是印度妇女常用名，作明以为书名，传说此书之作为纪念其爱女①，此书奉阿克拔(Akbar)大帝命，译成波斯文(1587)。也有英译本(1816)传世。作明死于1183年或1184年。

作明采集数百年来其先辈如圣使(Aryabhata)、梵藏(Brahmagupta)、大雄(Mahavira)数学成果并增补己见，写成《丽罗》②一书，足以代表十二世纪以前印度数学成就。全书共八章，有命题272道，第1章基本规定(命题1-8)，第2章定位法(命题9-11)，第3章基本运算法则：加、减、乘、除、乘方、开方、立方、开立方等八种运算(命题12-47)，第4章记各种算法(命题48-89)，第5章为实用算法(命题90-241)，第6章记库塔卡(命题242-

---

① C. N. Srinivasiengar,《The History of Ancient Indian Mathematics》, 1967, pp. 80—81。

② 《丽罗娃底》简称，下同。本文采用P.Jhā, D. Misra注释英译本，1959，各题汉译时已删去原著押韵诗文学描写。

260)，第7章为排列算法(命题261-271)，第8章结语(命题272)。《丽罗》体例、内容与中国古典数学著作有很多相似处。其第1章记度量衡各级换算制度，第2章定位法：自单位至10^{17}大数命名与《孙子算经》卷上之首堪相伯仲。第3章述自然数运算法则与《孙子算经》卷上相近，而对分数运算法则则与《九章算术》方田章全相一致，至于开方、开立方则与少广章同。

秦九韶于1247年作《数书九章》，计算题81道。题文涉及社会、经济、天文、气象、商业、农事、土木营造……可谓包罗万象。从数学内容看，数论、算术、代数、几何都有所深究。《数书九章》承前启后可以显示十三世纪中国数学水平。中国十三世纪之有《数书九章》，一如印度十二世纪之有《丽罗娃底》。在此，我们对二书相应命题作出对比，借以窥测中、印两民族在十二、十三世纪时在数学领域内各自研究的深度与广度，彼此为世界数学学科所作的重要贡献。

二、比　　较

2.1 计　息

计息是《丽罗》第5章实用算法重要内容。其所设题如

*L*91①："某甲年初贷人款项，已知月利率5%，年终得本利和1000卢比，求年初时本金及全年利息各多少?"原题题后用单假设法解。假设本金是1，按题意算得本利和是$\frac{8}{5}$卢比。然后把题设本利和数除以假设所得本利和数，本金是

$$1000\div\frac{5}{8}=625(\text{卢比})。$$

全年利息是　　$1000-625=375(\text{卢比})$。

《数书九章》第9章市物类取商业交易为题材，反映我国南宋

---

① *L*91指《丽罗》第91命题，下文仿此。

时代社会经济面貌；民间借贷关系频繁。本章“推求本息”、“推求典本”、“僦直推户”三题都是这类问题，其中第8题即“推求典本”题说：“问典库今年二月二十九日，有人取解一号主家，听得当事共计算本息一百六十贯八百三十二文，称系前岁头腊月半①解去，月息利二分二厘，欲知元本几何？答：本一百二十贯文。”题文大意是说贷款月利率2.2%得本利和160832文，借期为464天②，求本金。《数书九章》术文解法是：

$$本金=\frac{本利和}{1+\frac{464}{30}\times 月利率}=\frac{160832\times 30}{30+464\times 0.022}=120(贯)。$$

2.2 加权平均

《丽罗》书中从冶金需要构成加权平均算题，例如：

$L104$：“今有十三、十二、十一、十开金四块依次各重10、4、2、4两，使四块熔成一体，问它是多少开金块？”

$L107$：“十开金8两，十一开金2两，今又有另一金块重6两，使三块熔成十二开金块，问这另一金块是多少开？”

$L111$：“要使十六开、十开两金块合熔成十二开金，问两金块各应重多少？”

印度纯金作十六开，我国纯金作十分。《数书九章》有类似算题，计算要求超过《丽罗》，如第9章第6题“炼金计直”：“问库有三色金，共有五千两。内八分金一千二百五十两，两价四百贯文；七分五厘金一千六百两，两价三百七十五文；八分五厘金二千一百五十两，两价四百二十五贯文。并欲炼为足色，每两工食、药、炭钱三贯文，耗金九百七十二两五钱，欲知色分及两价各几何？答：色十分。两价五百三贯七百二十四文五百三十七分文之二百一十二。”

2.3 比例

①② 一年作360天计，一月作30天计。前岁头腊月半指前年十一月半到去年年初作45天计。去年年尾到今年二月二十九日作59天计。

《丽罗》有三率法、五率法，例如，

$L75$："优质樟脑63斤值104文，问同质樟脑$12\frac{1}{4}$斤值多少？"(三率法，正比例)

$L80$："十开金一两值1金币，问值1金币十五开金，应重多少？"(三率法，反比例)

$L83$："本金100元借1个月付利息5元，本金16元借1年，应付利息多少？"(五率法)

各题题后都附解题图式，并有答案。三率法经伊斯兰文化传入欧洲，在商业数学上曾起重要作用，当时欧陆著称为"金法"。在我国，早在《丽罗》成书前一千年已有同种算法，称为今有术。对应于$L75$，$L83$有以下问题

《九章算术·衰分章》第12题："今有绢一丈价值一百二十八，今有绢一匹九尺五寸，问得钱几何？"

同章第20题："今有贷人千钱，月息三十。今有贷人七百五十钱，九日归之，问息几何？"反比例问题在《九章算术》也早有反映。而《张邱建算经》卷上第31题："今有七百人造浮桥，九日成。今增五百人，问日几何？"单独命题，立术尤为明显。

《数书九章》有五率法两题：其中第7章第6题："问有营造地基，长一十一丈、阔一十七丈，先合三人筑三丈，计功二日，今涓吉立木有日，欲限三日筑了。每一日合收杵工几何？"①第8章第8题军器功程："问今欲造弓刀各一万副、箭一百万只。据功程七人九日造弓八张，八人六日造刀五副，三人二日造箭一百五十只。作院见管弓作二百二十五人，刀作五百四十人，箭作二百七十六人。欲知毕日几何？"

《丽罗》有五率以上比例问题如$L85$七率法，$L86$九率法，$L87$十一率法。五率以上比例问题今称复比例(compound proportion)，《数书九章》止于五率。我国今有术中有"重今有术"，今称连比例

① 参见本书"《数书九章》与土木建筑学"一文第8节。

(continued proportion)，至《数书九章》而灿然大备①，印度数学文献无此术。

《丽罗》有分配比例(proportional division)题，如

L95："甲乙丙三人各以51，68，85卢比入股经商，共得本利和300卢比。问各人应分得利润多少？"答数，甲：24，乙：32，丙：40卢比。《数书九章》有类似问题而入算数据尤为复杂，第九章第2题"均货推本"即为著例②。

使我们很感兴趣的是：

L93："把94个卢比分为三份，各按月利率5%，3%，4%生息，依次借贷7，10，5个月，要求所生利息相同，问三份各有多少卢比？又各生息多少？"事实上解此题时应综合运用连比例、反比例及配分比例。但《丽罗》在题后只附答案分成24，28，42卢比，各生息$8\frac{2}{5}$卢比，未作任何说明。

2.4 假设法

印度惯用单假设(single false position)法，《丽罗》也不例外，如

L53："某人有莲花若干朵，以其所有$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{4}$分别奉献于四神后，余下莲花6朵。问此人原有花多少朵？"题解说："如原有莲花1朵，按题文剩余$\frac{3}{60}$朵。把题设所余6朵除以假设所余数，答数是$6\div\frac{3}{60}=120$(朵)。

L54："某人持金到菩提迦耶朝山进香。过甲地布施所持金之半，过乙地布施所余数九分之二，后又以所余四分之一纳通行税。到目的地后又以所余十分之六布施。实余63卢比。问他最初持金多少？"题解说如原持金1卢比，按题文所说应剩余$\frac{7}{60}$卢比。把题设所余的63卢比除以假设所余数，答数是$63\div\frac{7}{60}=540$(卢比)。一般说对算术问题如形如：

---

① 见本书"《数书九章》第九章互易三题释"一文。

② 见本书"《数书九章》均货推本题分析"一文。

（Ⅰ）　　　　　　　　$ax=b$

单假设法总是有效的，但对于形如

（Ⅱ）　　　　　　　　$ax+c=b$

由于古人不知移项，单假设法就无能为力，必须用双假设(double false position)法。我国《九章算术》盈不足章就已熟练运用这种解法。后来通过伊斯兰文化传入欧洲成为解一般算术问题的万能方法，对(Ⅱ)型问题只要做两次假设：

$$x=a_1 \quad \text{得} \quad aa_1+c=b+g_1,$$
$$x=a_2 \quad \text{得} \quad aa_2+c=b+g_2,$$

那么所求

$$x=\frac{a_1g_2-a_2g_1}{g_2-g_1}。$$

《数书九章》第8章第9题"计造军衣"就用这种假设法解题。题文是："问库有布、棉、絮三色。计料欲制军衣。其布六人八匹，少一百六十匹，七人九匹，剩五百六十匹。其棉八人一百五十两，剩一万六千五百两，九人一百七十两，剩一万四千四百两。其絮四人一十三斤，少六千八百四斤，五人一十四斤，适足。欲知军士及布、棉、絮各几何？"题中所给 g_1，g_2 分别出现有余，不足；两余；不足，适足三种情况，要用双假设法解。

2.5　二次方程

《丽罗》在第4章对二次方程有专题介绍，方程

$$x\mp a\sqrt{x}=b$$

的求根公式是

$$x=\left(\sqrt{b+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\pm\frac{a}{2}\right)^2。$$

但所设算题与实际联系比较牵强，如

$L69$："鹅群全体平方根的十倍正在渡湖，全体八分之一在湖畔。余下6只在莲丛中。问鹅全体共有多少只？"解题方法是先设

鹅群有x只，据题意写出

$$x-10\sqrt{x}-\frac{x}{8}=6,$$

然后化为标准型

$$x-\frac{80}{7}\sqrt{x}=\frac{48}{7}。$$

答数是　　$x=144$

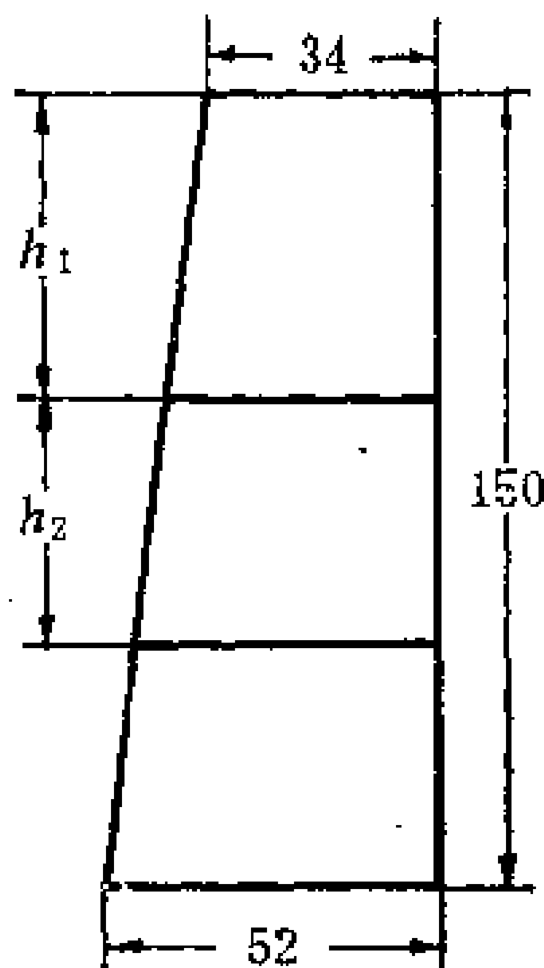


图　1

《数书九章》从生产实际需要提出要用二次方程解的算题多则，例如第3章第6题大意是说："梯形田如图1，要求把田面积均分三段，求各段上下底及高是多少？"原题术文根据相似句股形性质相当于列出二次方程

$$9h_1^2+5100h_1=322500.$$

用增乘开方法解得：

$$h_1\doteq57.41(步).$$

用同样方法求得：　　$h_2\doteq49.05(步)$.

2.6　数　列

《丽罗》第5章实用计算中有数列问题十六道，讨论面较广，题文变化多，所论数列有

(1) 等差数列初项(a)、末项(l)、项数(n)，公差(d)、和(s)五要素中已知其三，求其余二元素问题，如

L122："某人月初布施4卢比，以后每天增5卢比，问到月底共布施多少？"

L123："已知初项为7，公差为5，项数为8，求末项、中项。"

L123："已知总和为105，项数为7，公差为3，求初项。"

(2) 等比数列求和问题，如

$L131$："某甲布施僧人初一为2卢比，以后逐日加倍，问一月(30天)共布施多少卢比？"题后列答数为2147483646卢比。

(3) 三角垛积求和公式(至二阶止)

$L117$，$L118$指出：

1，2，3，4，5，……，n 前n项和是$\frac{1}{2}n(n+1)$

1，3，6，10，15，……，$\frac{1}{2}n(n+1)$ 前n项和是$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

1，4，10，20，35，……，$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

(4) 自然数幂和公式(至三次止)

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{3}(n)(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right),$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}(n+1)n\right]^2.$$

关于第1种问题《丽罗娃底》、《数书九章》都有全面讨论，总结如下表：

已知件	a,d,n	d,n,l	a,d,n	a,n,l	a,d,s
求件	l	a	s	d	n
《丽罗娃底》题号	$L123$	$L125$	$L122$	$L126$	$L129$
《数书九章》题号	Ⅴ9①	Ⅴ9	Ⅶ3	Ⅴ9	Ⅷ3

《数书九章》缺第2种问题，也不载第3、第4种问题。

2.7 句股定理

《丽罗》第5章列有与直角三角形有关的算题共二十六道，这些算题可以分为五类：

(1) 三边：句(a)、股(b)、弦(c)三要素中已知其二，求另一

① Ⅴ9指第5章第9题，下仿此。

边。如$L139$已知a，b求c，

(2) 已知$b+c$，a求c，b，如：

$L149$："竹高32尺，风吹竹折，竹顶离根16尺，求折处高度。"

$L152$："竿下有穴。竿上有鹰，竿高9丈。鹰见在距高三倍处有蛇正向穴游动，鹰起飞攫蛇。问二者在何处相遇？"

(3) 已知$c-b$，a求c，b。如

$L154$："莲花露出水面$\frac{1}{2}$寸，风吹，花斜碰到水面，离原地2寸，求水深。"

(4) 已知$a+b$，c，求a，b。如

$L159$："弦长17，句股和23，求句、股各是多少？

(5) 已知$b-a$，c，求a，b。如

$L160$："弦长13，句股差7，求句、股各是多少？

《数书九章》对这五类问题无对应记载，但如所周知我国远在《九章算术》成书时，对此类问题已有精湛理解：有算题、有公式，在三世纪时已有全面证明①，两书对应算题我们列表比较如下：

已知件	a,b	a,c	b,c	$c+b,a$	$c-b,a$	$a+b,c$	$b-a,c$
求件	c	b	a	c,b	b,c	a,b	a,b
《丽罗》	$L137$	$L137$	$L137$	$L149$	$L154$	$L159$	$L160$
《九章算术》	Ⅸ1	Ⅸ2	Ⅸ3	Ⅸ13	Ⅸ9	Ⅸ11	Ⅸ11

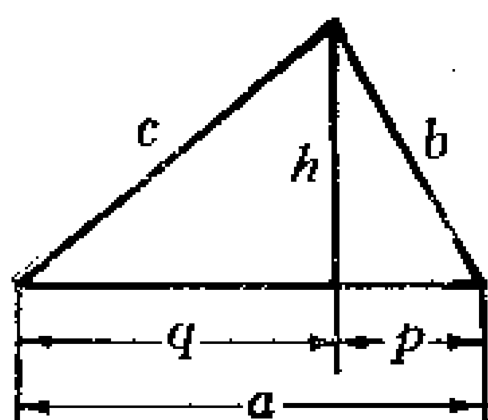


图 2

$$p=\frac{1}{2}\left[a-\frac{(c+b)(c-b)}{2}\right],$$

$$q=\frac{1}{2}\left[a+\frac{(c+b)(c-b)}{2}\right].”$$

$L166$:“三角形的高 $h=\sqrt{b^2-p^2}=\sqrt{c^2-q^2}$，三角形面积

$$\triangle=\frac{1}{2}ah.”$$

$L167$:“已知$a=14$，$b=13$，$c=15$，算得$p=5$，$q=9$，$h=12$，因此$\triangle=84$。”

《数书九章》第3章第2题说：“问沙田一段有三斜，其小斜(b)一十三里，中斜(a)一十四里，大斜(c)一十五里……欲知为田几何?”对照上图、术文相当于说：所求三角形面积

$$\triangle^2=\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right].$$

显然这与$L165$，$L166$，$L167$的结果是等价的①，二者又显然等价于希腊希隆(Heron)三角形面积公式

$$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\quad s=(a+b+c)/2.$$

《丽罗》和《数书九章》公式都无推导过程，其渊源关系从来是数学史上一疑案，公式西来之说因此发生。吴文俊先生运用我国传统的出入相补原理有一复原②设想。把公式的关键：求p，q问题归

① L167与《数书九章》Ⅲ2数据都相同。

② 吴文俊，“出入相补原理”，《中国古代科技成就》，中国青年出版社，1978年80—100页。

结为已知弦(q)股(p)和，句($\sqrt{q^2-p^2}=\sqrt{a^2-b^2}$)求弦、股问题。从本文2.7节分析，知中国和印度古代都已熟悉这一公式。根据L165所记，他们确实是把b，c在a上的投影q，p看成

股弦和$(q+p)=a$，

$$股弦差(q-p)=\frac{句^2}{股弦和}=\frac{q^2-p^2}{q+p}=\frac{c^2-b^2}{a}$$
$$=\frac{(c+b)(c-b)}{a}$$

的和差平均。印度这一史实可以作为吴先生设想的一个旁证。另一方面这一设想还可以为印方提供《丽罗》推导依据。

更有兴趣的是当十四世纪时印度后期圣使学派成员庞迪特(N. Pandite)有三角形用三边表示的面积公式竟与《数书九章》三斜求积公式完全相同①。

2.9 体积

《丽罗》第5章记土方计算题六道，其中拟柱体体积公式

L217：$V=\frac{h}{6}[ab+cd+(a+c)(b+d)]$，公式无推导过程，而

L218："已知$a=10$，$b=12$，$c=5$，$d=6$，$h=7$。"答数是70。

《数书九章》第7章第5题"计作清台"用公式

$$V=\frac{h}{6}[(2a+c)b+(2c+a)d].$$

二书公式是等价的。在我国，公式已为刘徽证明。

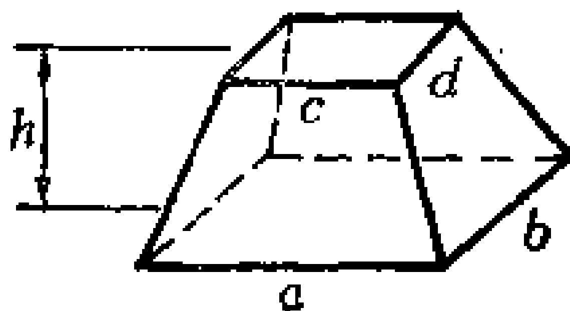


图 3

《丽罗》第5章还有油粮种子圆锥状堆高度(h)与底周长(c)比即$r=h:c$的经验公式。算题只给出粮堆底面周长，根据经验公式算出相应高度后再计体积，如

① T.A.S.Amma,《Geometry in Ancient and Medieval Indian》, 1979, p.128。

$L227$："粗粒粮(豆)　　$r_1=\frac{1}{10}$，($\theta_1$①$=32°.1$)

细粒粮(芝麻)　$r_2=\frac{1}{11}$，($\theta_2=29°.7$)

米　粒　　　　$r_3=\frac{1}{9}$，($\theta_3=34°.9$)"

$L228$："粗粒、细粒、米粒圆锥状粮堆，底周长都是60尺，求各自体积。"原题先根据$L227$公式分别算出对应的h后，按照

$$V=\frac{c^2}{36}h$$ ②计算体积

三者体积依次是　600，$545\frac{5}{11}$，$660\frac{2}{3}$立方尺.

$L230$：三种粮如靠壁，靠壁内角堆放，问各有多少体积?"原题附图，按$L228$结果的$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$折算。《数书九章》无对应算题，但如众所知《九章算术》有粮堆问题：

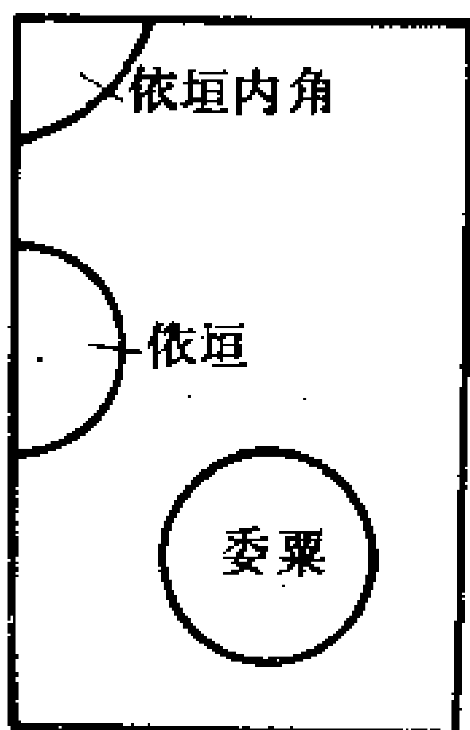


图　4

$V23$："委粟平地，下周一十二丈，高二丈，问积几何?"

$V24$："委菽(豆)依垣下周三丈高七尺，问积几何?"

$V25$："委米依垣内角，下周八尺，高五尺，问积几何?"

与《丽罗》比较

粗粒粮(豆)　$r_1=\frac{7}{60}$，$\theta_1=36°.2$，

细粒粮(粟)　$r_2=\frac{1}{6}$，$\theta_2=46°.3$，

米　粒　　　$r_3=\frac{5}{32}$，$\theta_3=44°.5$.

粮食颗粒愈大休止角愈小，中印一理。

2.10　相似句股形

① θ指休止角，θ是我们根据题设r算出的。

② 适与《九章算术》商功章第13题圆锥术同。

《丽罗》第 5 章与三率法相结合从相似句股形性质列度影量长题十则，其中论述灯高、竿影关系如

$L236$："图 5 中灯与竿水平距为a，竿高s，竿影长为b，则灯高

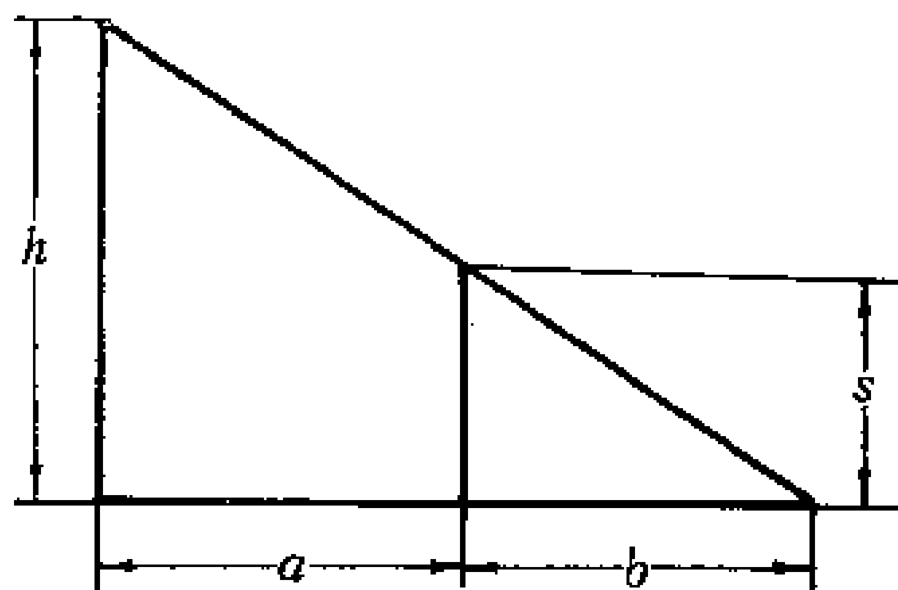


图 5

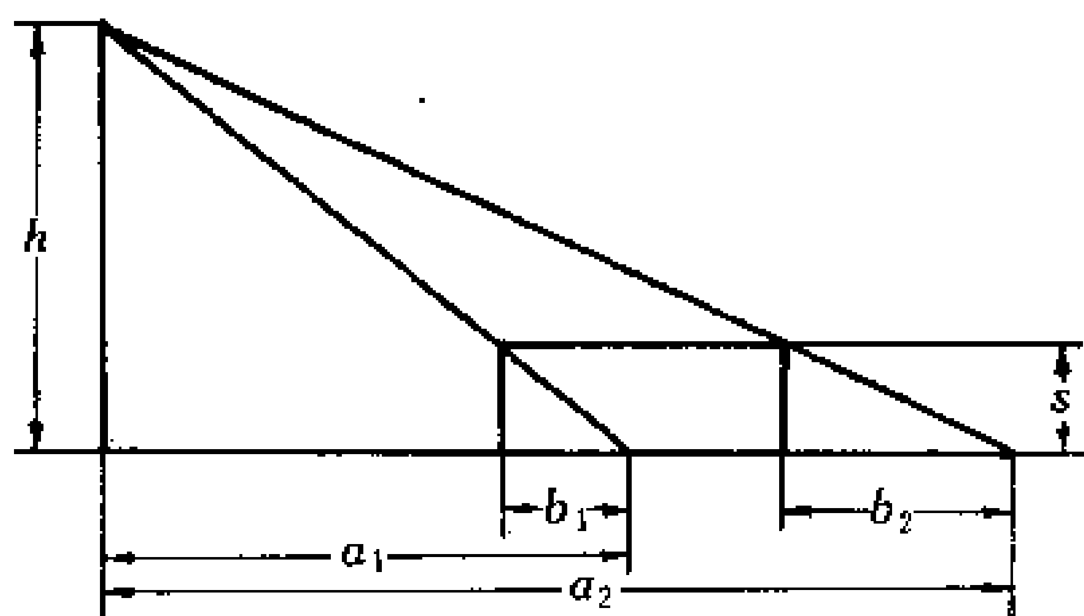


图 6

$$h=\frac{a}{b}s+s"$$

$L240$："图6中同高(s)两竿，影长分别是b_1，b_2，灯与二影右端平距分别是a_1，a_2。则灯高

$$h=\frac{a_2-a_1}{b_2-b_1}s."$$

《数书九章》第4章第1题适与L240同型："问名山去城不知高(h)远(a_2)。城外平地有木一株，高二丈三尺，假为前表，乃立后表与木齐(s)。相去一百六十四步($a_2-a_1+b_1$)，先退前表三丈九寸(b_1)，次退后表三丈一尺三寸(b_2)，斜望山峰，各与其表之端三合。人目高五尺…欲知山高及远各几何?"先于此题之前一千年刘徽在所著《海岛算经》已有完整叙述并给出正确解题公式。在《丽罗》成书后不久，秦九韶的同代人杨辉还给出无瑕可击的证明。

2.11 不定分析

《丽罗》第6章有19道与一次不定方程有关算题，其解法是与《数书九章》第1章大衍类九题解法等价①。

2.12 排列

《丽罗》第7章论排列，其中主要工作为

(1) 全相异元素全排列

L261："1至9九个数字取n个的全排列是$n!$"

L262："取2，8二数字所排成的二位数全体总和是

$$28+82=\frac{2!\times(2+8)}{2}\times 11=110."$$

"取 3，9，8三个数字所排成三位数全体总和是 398+389

$$+938+983+839+893=\frac{3!\times(3+9+8)}{3}\times 111=4440."$$

"取 2，3，4，5，6，7，8，9八个数字所排成的八位数全体总和是：

$$23456789+23456798+\cdots=\frac{8!\times(2+3+4+5+6+7+8+9)}{8}$$

$$=2463999975360."$$

L263："湿婆神有十只手，各持不同法器，问有多少种变化，"答数是$10!=3628800$.

---

① 见本书"大衍求一术与库塔卡"一文。

(2) 非全相异元素全排列

L264："n个数字中有r，s，……个分别相同。其全排列数是

$$\frac{n!}{r!\,s!\cdots\cdots}.”$$

L264："数字2，2，1，1全排列

$$\frac{4!}{2!\,2!}=6.$$

这些数字排成的四位数全体总和是

$$2211+2121+2112+1212+1221+1122$$
$$=\frac{6\times(2+2+1+1)}{4}\times1111=9999”$$

“数字4，8，5，5，5全排列

$$\frac{5!}{3!}=20.$$

这些数字排成的五位数全体总和是

$$48555+84555+\cdots\cdots=\frac{20\times(4+8+3\times5)}{5}\times11111$$
$$=1199988.”$$

三、小　　结

从以上十二类问题比较可见中国和印度两民族在数学领域内都有重要建树。后来又通过伊斯兰文化西传成为文艺复兴后欧洲数学发展重要源泉。至于中印双方数学文化的影响和交流历来是历史学者关心和感兴趣的问题。中印和平使者自汉以来已往来频繁，发展中具体细节又如此相近，因此影响和交流是肯定的，但是由于文献无证，这也是很困难的问题。通过对上述两书的比较可知两民族的数学当时都已具规模，但互有短长，从这两部名著所反映的事实：某些课题如数列、排列，印度先于中国，其他不

少课题，其深度、广度俱逊于中国。特别是在代数学方面，作为代数学最重要内容的多项式方程数值解，线性方程组一般解法在中国起源很早，至《数书九章》已达到非常熟练的境界①，而在印度数学中则全系空白，无所反映，所以如果要评比十二、十三世纪时中印两国数学水平高下，其结论是很明显的。

① 见本书"《数书九章》均输推本题分析"、"增乘开方法源流"二文。

秦九韶大衍总数术与关孝和诸约之术

沈 康 身

1. 关孝和其人

关孝和(1642?—1708)日本国郡马县人，字子豹，号自由亭。由于他在数学上的杰出贡献，日本人民尊为算圣。关孝和著述极富，其中《括要算法》四卷(1683初版)，卷2为诸约之术，与秦九韶《数书九章》大衍总数术可相伯仲，极为类似。

如所周知，中算要籍远在隋唐时期已传入日本。其后，宋元明数学新作络续东布，其中可考的有：宋杨辉《杨辉算法》(1274—1275)，元朱世杰《算学启蒙》(1299)，明吴敬《九章算法比类大全》(1450)，明程大位《算法统宗》(1592)。中算论著对关氏治学有很大影响。特别是关孝和十九岁时曾手抄《杨辉算法》一部三册①，其第三册"续古摘奇算法"分上、下卷，卷上在紧接纵横图之后有翦管术五问，第1问即《孙子算经》物不知数题。后续四问，其模数分别为3，5，7；7，8，9；11，12，13；2，5，7，9。均两两互素。此五题对关氏研究一次同余式(组)应有直接借鉴作用。至于宋金元时期另外三部要籍：《数书九章》，《四元玉鉴》，《测圆海镜》也有传入日本的形迹，日本人狩野亨吉说，相传关孝和在奈良某寺阅读中国算书三年②。而有人说宋秦九韶《数书九章》大衍求一术对翦管术有一般论说，但此书并无传入日本形

① 自然科学史研究所藏(李俨遗赠)关氏手抄古杭勤德书堂本的抄本，书末有记："宽文辛丑(1661)仲夏下浣日订写讫，关孝和。"

② 李俨，《中算史论丛》第五集"中算传入日本的经过"。

迹①。可见关孝和是否见过《数书九章》，关孝和关于一次同余式(组)有关论述是否独立完成是一未解之谜，但我们也没有必要遽下结论。从《括要算法》卷2诸约之术与秦氏大衍总数术对比、分析可知，二术互有短长而异曲同工：无论如何秦(1247)关(1683)俱先于西方，二术殊途同归、互相补充，正可以使东方同余理论更为完整。

2. 关孝和诸约之术

关孝和诸约之术中心议题是一次同余式(组)解法。诸约之术所用数学名词，有的用汉字且与中算同义，如：等数，约(分)，通(分)，分子，分母，并，乘、因，除，法、实、商。有的用汉字而与中算异其义，如：互约，逐约，齐约，遍约。

下文我们以$(a, b, \cdots c)$记$a, b, \cdots c$的最大公约数，以$\{a, b, \cdots, c\}$记$a, b, \cdots, c$的最小公倍数。

诸约之术中所论互约、逐约、齐约、遍约四术是解一般同余组问题的准备工作：

(1) 互约术　相当于秦氏大衍总数术中从二元数(m_1, m_2)求定母(μ_1, μ_2)的方法。我们知道定母的条件有三：

$(\mu_1, \mu_2)=1$,　$\mu_i | m_i (i=1, 2)$, $\mu_1\mu_2=\{m_1, m_2\}$，《括要算法》有三例：

例1　“今有六个、八个，问互约之，各几何？答曰：六为三，八不约。术曰：六与八互减，得等数二，以约六为三。(自注：三与八互减得等数一，乃得等数一，则不约而止，后效之)。又术曰：八与六互减，得等数二，以约八为四。四与六互减，得等数二，以因四为八，约六为三，合问。”

本题　$m_1=6, m_2=8$。初术是说$(m_1, m_2)=2$，而$\left(\frac{m_1}{2}, m_2\right)=1$，就取$\mu_1=\frac{m_1}{2}=3$，$\mu_2=8$。又术是说$(m_1, m_2)=2$，而$\left(m_1, \frac{m_2}{2}\right)$

---

① 日本学士院，《明治前日本数学史》卷2。

$=(6,4)=2$，就取$\mu_1=\frac{6}{2}=3$，$\mu_2=4\times2=8$。

例2 “今有三十六个，四十八个，问互约之，各几何？ 答曰：三十六为九，四十八为一十六。术曰：三十六与四十八互减得等数一十二，以约三十六为三。三与四十八互减，得等数三，以因三为九，约四十八为一十六。”

本题 $m_1=36$，$m_2=48$。术文是说$(m_1, m_2)=12$，而$\left(\frac{m_1}{12}, m_2\right)=(3, 48)=3$，就取$\mu_1=3\times3=9$，$\mu_2=\frac{48}{3}=16$。

例3 “今有三十个，五十四个，问互约之，各几何？答曰：三十为五，五十四不约。又曰：三十为一十，五十四为二十七。术曰：三十与五十四互减，得等数六，以约三十为五。又术曰：五十四与三十互减，得等数六，以约五十四为九。九与三十互减，得等数三，以因九为二十七，约三十为一十，合问。”

本题 $m_1=30$，$m_2=54$。一问有二答：$\mu_1=5$，$\mu_2=54$；或$\mu_1=10$，$\mu_2=27$。初术是说：$(30, 54)=6$，而$\left(\frac{m_1}{5}, m_2\right)=1$，就取$\mu_1=5$，$\mu_2=54$。又术是说，如取$\mu_1'=30$，$\mu_2'=\frac{54}{6}=9$，而$(\mu_1', \mu_2')=(30, 9)=3$，就取$\mu_1=\frac{30}{3}=10$，$\mu_2=9\times3=27$。

关孝和在这里所举三个适当例子，揭示出从二元数术定母的一般方法：先求$(m_1, m_2)=d$，取$\mu_1=m_1$，$\mu_2=\frac{m_2}{d}$，如果$(\mu_1, \mu_2)=d'=1$，μ_1，μ_2就是所求定母。如果$d'\neq1$，则取$\mu_1'=\frac{\mu_1}{d'}$，$\mu_2'=\mu_2 d'$。如果$(\mu_1', \mu_2')=d''=1$，μ_1'，μ_2'就是所求定母①。

(2) **逐约术** 从几个元数m_1，m_2，…，m_n求定母μ_1，μ_2…，μ_n的方法，这里

$(\mu_i, \mu_j)=1$，$(1\leqslant i<j\leqslant n)$，$\mu_i | m_i$，$\mu_1\mu_2\cdots\mu_n=\{m_1, m_2,$

① 如果$d''\neq1$，还可以如法继续进行，直止符合定母条件止，正如关孝和在自注中所说，“后效之。”对此，李继闵有详尽讨论，见本书李继闵：“关于‘大衍总数术’中求定数算法的探讨”一文。

…, m_n}。《括要算法》有三例。其中例1，$m_1=105$，$m_2=112$，$m_3=126$。

答数：$\mu_1=5$，$\mu_2=16$，$\mu_3=63$。

例2，$m_1=105$，$m_2=112$，$m_3=126$，$m_4=168$。

答数：$\mu_1=5$，$\mu_2=16$，$\mu_3=9$，$\mu_4=7$。

我们全录例 3 题文，答文和术文，并作解释。例3："今有一百零五个、一百一十二个、一百二十六个、一百六十八个、二百零四个，问逐约之，各几何？答曰：一百零五为五、一百一十二为一十六、一百二十六为九、一百六十八为七、二百零四为一十七。术曰：一百零五与一百一十二依互约术，一百零五为一十五，一百一十二不约。一十五与一百二十六依互约术，一十五为五，一百二十六不约。五与一百六十八依互约术皆不约。五与二百零四依互约术，皆不约。一百一十二与一百二十六依互约术，一百一十二为一十六，一百二十六为六十三。一十六与一百六十八依互约术，一十六不约，一百六十八为二十一。一十六与二百零四依互约术，一十六不约，二百零四为五十一。六十三与二十一依互约术，六十三为九，二十一为七。九与五十一依互约术，九不约，五十一为一十七。七与一十七依互约术，皆不约，合问。"

本例 $m_1=105$，$m_2=112$，$m_3=126$，$m_4=168$，$m_5=204$。答案：$\mu_1=5$，$\mu_2=16$，$\mu_3=9$，$\mu_4=7$，$\mu_5=17$符合定母条件。关氏术文所说相当于秦氏大衍总数术连环求等，经四变、十次互约得到结果。我们列表解释如下：

	①		②		③		④		①		②		③
105	①（105, 112）	15	②（15～126）	5	③（5～168）	5	④（5～204）	5		5		5	
112		112		112		112		112	①（112, 126）	16	②（16～168）	16	
126		126		126		126		126		63		63	③（63～204）
168		168		168		168		168		168		21	
204		204		204		204		204		204		204	

一变（前四列）　二变（后三列）

三变		四变	
5	5	5	5
16	16	16	16
63 ①（与21）	9 ②（9至51）	9	9
21	7	7 ①（与17）	7
51	51	17	17

其中一变

①: $(105, 112)=7$, $\frac{105}{7}=15$, $(15, 112)=1$,

取 $\mu_1=15$, $\mu_2=112$。

②: $(15, 126)=3$, $\frac{15}{3}=5$, $(15, 126)=1$,

取 $\mu_1=5$, $\mu_2=126$。

③: $(5, 168)=1$ ④ $(5, 204)=1$, 皆不约。

二变

①: $(112, 126)=14$, $\frac{112}{14}=8$, $(8, 126)=2$,

取 $\mu_1=8\times2=16$, $\mu_2=\frac{126}{2}=63$。

②: $(16, 168)=8$, $\frac{168}{8}=21$, $(16, 21)=1$,

取 $\mu_1=16$, $\mu_2=21$。

③: $(16, 204)=4$, $\frac{204}{4}=51$, $(4, 51)=1$,

取 $\mu_1=4$, $\mu_2=51$。

三变

①: $(63, 21)=21$, $\frac{63}{21}=3$, $(3, 21)=3$,

取 $\mu_1=3\times3=9$, $\mu_2=\frac{21}{3}=7$。

②：　$(9,\ 51)=3$，　$\frac{51}{3}=17$，$(9,\ 51)=1$，

取$\mu_1=9$，$\mu_2=17$。

四变

①：　$(7,\ 17)=1$，取$\mu_1=7$，$\mu_2=17$。

从本例可见关氏从几个元数m_1，m_2，…，m_n求定母μ_1，μ_2，…，μ_n的一般方法：先按照互约术求m_1，m_2的定母μ_1，μ_2；μ_1，m_2的定母μ_1'，μ_2；μ_1'，m_3的定母μ_1''，μ_3…直至$\mu_1^{(n-2)}$，m_n的定母$\mu_1^{(n-1)}$，μ_n。这n次运算，秦氏称为一变。对μ_2，μ_3，…，μ_n依次重复作类似于一变的二变运算，……最后得所求的定母[1]。

(3) 齐约术　求几个数衍母的方法，《括要算法》有三例，其运算步骤是

例1　$\{6,\ 8\}=3\times 8$。

例2　$\{6,\ 8,\ 9\}=\{\{6,\ 8\},\ 9\}=\{24,\ 9\}=72$。

其中两数衍母都借助于两两求等后做除法得出结果，即$\{a,b\}=\frac{ab}{(a,b)}$，如：

例3　$\{6,\ 14,\ 15,\ 25\}=\{\{6,\ 14\},\ 15,25\}$

$$=\left\{\frac{6\times 14}{(6,\ 14)},\ 15,\ 25\right\}=\{\{42,\ 15\},\ 25\}$$

$$=\left\{\frac{42\times 15}{(42,\ 15)},\ 25\right\}=\{210,\ 25\}$$

$$=\frac{210\times 25}{(210,\ 25)}=1050。$$

(4) 遍约术　求几个数等数的方法。《括要算法》有三例，其运算步骤是依次求等，如

例3　$(48,\ 72,\ 108,\ 128)=((48,\ 72),\ 108,\ 128)=(24,$

---

[1] 对此，李继闵有详尽讨论，见本书李继闵："关于"大衍总数术"中求定数算法的探讨"一文。

108, 128)=((24, 108), 128)=(12, 128)=4。

(5) 剩一术　相当于秦氏大衍求一术，即解一次同余式

$$ax\equiv 1(\bmod\ b),\ (a,\ b)=1。$$

《括要算法》列二例：

例1　解　$19x\equiv 1(\bmod 27)$，$(a<b)$。

例2　解　$179x\equiv 1(\bmod 74)$，$(a>b)$。

按《数书九章》成书后未经刊印，书与宋亡同濒湮灭，不绝如缕。至明季始出赵琦美抄本，未闻有人了其义。所以至晚清张敦仁(1754—1834)重理此术时说："求一术仅见于宋秦九韶数书九章中，五百年来无有知其说者矣！"经张敦仁、李锐、骆腾凤、黄宗宪等几代人努力，秦氏大衍术重新大彰于世。黄宗宪解释平易近人，用现代数学语言来说，当解一次同余式　$ax\equiv 1(\bmod b)$，$(a,\ b)=1$时，用更相减损(即欧几里得算法)术处理

$$\frac{a}{b}=q_1+\frac{r_1}{b},$$

$$\frac{b}{r_1}=q_2+\frac{r_2}{r},$$

$$\cdots\cdots$$

记逐次商为q_1，q_2，…，q_n，对应的余数为r_1，r_2，…，r_n。控制当n为奇数$2m+1$时　$r_{2m+1}=1$。他定义寄数J_n

$$J_n=q_nJ_{n-1}+J_{n-2},\ J_0=0,\ J_1=1,$$

那末，J_{2m+1}就是同余式的解。

其例1列表对照如下：

(6) 翦管术　解一次同余组的方法，翦管术一词首见杨辉《续古摘奇算法》卷上以名《孙子算经》物不知数题解法，词源未详。《括要算法》列翦管术九例，各有特色。我们记同余式

$$a_ix\equiv r_i(\bmod\ b_i)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

可分类如下：

6.1　$a_i=1$

<table>
<tr><th>《括要算法》剩一术 例 1</th><th>黄 宗 宪 程 序</th></tr>
<tr><td>题文：今有以左一十九累加之得数，以右二十七累减之，剩一，问左总数几何？</td><td>解
$19x \equiv 1 \pmod{27}$</td></tr>
<tr><td>答数：左总数一百九十。</td><td>答 $19x = 190$</td></tr>
<tr><td>术文：
以左一十九除右二十七①，得商一(q_2)，不尽八为甲(r_2)。以甲不尽八，除左一十九，得商二(q_3)，不尽三为乙(r_3)。以乙不尽三除甲除甲不尽八，得商二(q_4)，不尽二为丙(r_4)。以丙不尽二除乙不尽三，得商一(q_4)，不尽一为丁(q_5)，乃余一(r_6)为止。
甲商与乙商相因，加定一，得三为子(J_3)。
丁与丙商相因，加甲商，得七为</td><td>
<table>
<tr><td>$J_1=1$</td><td>19</td><td>27</td><td>$J_0=0$</td></tr>
<tr><td>$+2\times1=2$</td><td>$-(2\times8=16)$</td><td>-19</td><td>$+1\times1=1$</td></tr>
<tr><td>$J_3=3$</td><td>3</td><td>8</td><td>$J_2=1$</td></tr>
<tr><td>$+1\times7=7$</td><td>$-(1\times2=2)$</td><td>$-(2\times3=6)$</td><td>$+(2\times3=6)$</td></tr>
<tr><td>$J_5=10$</td><td>1</td><td>2</td><td>$J_4=7$</td></tr>
</table>
$J_3 = q_3J_2 + J_1 = q_3q_2 + 1 = 3$
$J_4 = q_4J_3 + J_2 = 7$</td></tr>
</table>

① 本例$a<b$，$q_1=0$，$J_0=0$，$J_1=1$

续表

《括要算法》剩一术 例 1	黄 宗 宪 程 序
丑(J_4)。 丑与丁商相因，加子，得一十(J_5)。 以左一十九乘之，得左总数一百九十，合问。	$J_5=q_5J_4+J_3=10$ $19\times10=190\equiv1\pmod{27}$

6.1.1 $(b_i, b_j)=1(1\leqslant i<j\leqslant n)$

例1 含二个同余式：$x\equiv1(\bmod 5)\equiv2(\bmod 7)$

例3 含三个同余式：

$x\equiv2(\bmod 3)\equiv1(\bmod 5)\equiv5(\bmod 7)$

例5 含四个同余式：

$x\equiv3(\bmod 5)\equiv2(\bmod 7)\equiv2(\bmod 9)\equiv7(\bmod 11)$

6.1.2 $(b_i, b_j)\neq1$，$(1\leqslant i<j\leqslant n)$

例2 含二个同余式：$x\equiv2(\bmod 36)\equiv14(\bmod 16)$

例4 含三个同余式：

$x\equiv3(\bmod 6)\equiv3(\bmod 8)\equiv5(\bmod 10)$。

6.2 $a_i>1$

6.2.1 $(b_i, b_j)=1$，$(1\leqslant i<j\leqslant n)$

例9 含二个同余式：$13x\equiv3(\bmod 7)\equiv8(\bmod 9)$

例7 含三个同余式：

$8x\equiv2(\bmod 3)$，$7x\equiv3(\bmod 4)$，$6x\equiv3(\bmod 5)$

6.2.2 $(b_i, b_j)\neq1$，$(1\leqslant i<j\leqslant n)$含三个同余式：

例8 $34x\equiv6(\bmod)8\equiv14(\bmod 20)\equiv23(\bmod 27)$

例6 我们把例6列表对照如下：

<table>
<tr><th>《括要算法》翦管术例 6</th><th>今　　释</th></tr>
<tr><td>题文：今有物不知其数。只云：三十五乘，四十二除，余三十五个。四十四乘，三十二除，余二十八个。四十五乘，五十除，余三十五个。问总数几何？</td><td>解同余组
$$\begin{cases}35x\equiv35\pmod{42}\\44x\equiv28\pmod{32}\\45x\equiv35\pmod{50}\end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>答数：一十三</td><td>答：　$x=13$</td></tr>
<tr><td>术文：
三十五与四十二互减，得等数七，以约三十五。乘四十二除，为五乘六除。
四十四与三十二互减，得等数四，以约四十四乘三十二除，为十一乘八除。
四十五与五十互减，得等数五，以约四十五乘五十除，为九乘一十除。</td><td>解：
$(35,\ 42)=7$，$(44,\ 32)=4$，$(45,50)=5$。分别约题设各同余式，得等价同余组
$$\begin{cases}5x\equiv5\pmod{6}\\11x\equiv7\pmod{8}\\9x\equiv7\pmod{10}\end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>六除、八除、一十除，依逐约术得三除、八除、五除，依图布算
<table><tr><td>𝍤 五乘</td><td>𝍢 三除</td></tr><tr><td>一𝍠 一十一乘</td><td>𝍧 八除</td></tr><tr><td>𝍨 九乘</td><td>𝍤 五除</td></tr></table></td><td>对元数是6，8，10的同余组化为定母是3，8，5的等价同余组
$$\begin{cases}5x\equiv5\pmod{3}\\11x\equiv7\pmod{8}\\9x\equiv7\pmod{5}\end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>以五乘为左，以三除为右，依剩一术得左二段。以一十一为左，以八除为右，依剩一术得左三段。以九乘为左，以五除为右，依剩一术</td><td>改解$\begin{cases}5x_1\equiv1\pmod{3}\\11x_1\equiv1\pmod{8}\\9x_1\equiv1\pmod{5}\end{cases}$，　从大衍</td></tr>
</table>

续表

《括要算法》翦管术例 6	今释
得左四段。	求一术，它等价于 $\begin{cases} x_1\equiv 2 \pmod 3 \\ x_1\equiv 3 \pmod 8 \\ x_1\equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$
八除、五除相因得四十为左，以三除为右，依剩一术，得四十，以左二段乘之，得八十。 三除、五除相因得一十五为左，以八除为右，依剩一术，得一百零五，以左三段乘之，得三百一十五，满一百二十去之，余七十五。 三除、八除相因得二十四为左，以五除为右，依剩一术，得九十六，以左四段乘之，得三百八十四，满一百二十去之，余二十四。	化为互相独立的同余式 $40F_1\equiv 1 \pmod 3$ 用大衍求一术解得 $F_1=1$， $2\times 40F_1=80$ $15F_2\equiv 1 \pmod 8$ 用大衍求一术解得 $F_2=7$， $3\times 15F_2=315\equiv 75 \pmod{120}$ $24F_3\equiv 1 \pmod 5$ 用大衍求一术解得 $F_3=4$， $4\times 24F_3=384\equiv 24 \pmod{120}$
三除、八除、五除相乘，得一百二十，为去位。	衍母 $=3\times 8\times 5=120$
三十五乘四十二除(的)余(数用)七约之，以八十乘之。 四十四乘三十二除余四约之，以七十五乘之。 四十五乘五十除余五约之，以二十四乘之。	$\frac{35}{7}\times 80=5\times 80=400$， $\frac{28}{4}\times 75=7\times 75=525$， $\frac{35}{5}\times 24=7\times 24=168$。
三位相并，共得一千零九十三个，满一百二十去之，余一十三个，为总数。	$x=400+525+168$ $=1093\equiv 13 \pmod{120}$

本例先对题设同余组中同余式$(a_i, r_i, b_i)=d\neq 1$先行约简，记$a_i=a_{i1}d$，$r_i=r_{i1}d$，$b_i=b_{i1}d$，则同余组变换为

$a_{i1}x\equiv r_{i1}(\mathrm{mod}\ b_{i1})(i=1, 2, \cdots, n)$。

如 $(b_{i1}, b_{j1})\neq 1$，$1\leqslant i<j\leqslant n$，就用逐约术求得相应的定母$\mu_1$，$\mu_2$，$\cdots$，$\mu_n$，得等价同余组

$$a_{i1}x\equiv b_{i1}(\mathrm{mod}\ \mu_i),\ (i=1, 2, \cdots, n)$$

改解 $a_{i1}x_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ \mu_i)$。用大衍求一术

化为同余组 $x_i\equiv c_i\ (\mathrm{mod}\ \mu_i)$。

从彼此独立的几个同余式

$$M_iF_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ \mu_i), M_i=\frac{M}{\mu_i},\ M=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}。$$ 解

出 F_1，F_2，$\cdots$，F_n则

$$x_1\equiv\sum_{i=1}^{n}c_iM_iF_i(\mathrm{mod}M),$$ 而

所求同余组的解是：

$$x=\sum_{i=1}^{n}b_{i1}c_iM_iF_i(\mathrm{mod}M),\ (i=1, 2, \cdots, n)。$$

3. 关孝和诸约之术的特色

关孝和诸约之术启蒙于中华，自不待言。诸约各术之成熟完善在时间上虽远后于秦氏大衍总数术，而在质量上有青出于蓝而胜于蓝之处。秦氏术主要内容有四：一、把问数(同余组的模数)分为四类：元数(一般自然数)、复数(有公约数的自然数)、收数(小数)、通数(分数)。二、求定母。三、解一次同余式。四、解一次同余组。由于我国古代无素数概念，在求定母时秦氏对元数、复数区别对待(收数、通数化为元数或复数后再处理)。

秦氏的元数求定母法：

“先以两两连环求等，约奇弗约偶。”①如果二者仍有等数

① 奇、偶，指元数位置而言，从李继闵解释，见本书“关于‘大衍总数术’中求定数算法的探讨”一文。

就：

"乃约偶弗约奇"秦氏称为"反约"①，如果：

"或皆约，犹有类数存者，又相减以求续等，以续等约彼，则必复乘此，乃得定数。"②

秦氏的复数求定母法：

"以诸数求总等，存一位，约众位，始得元数。"③

在解同余组问题中秦氏为使两两有等数的元数化为两两无等数，发明用连环求等方法化元数为定母，定母互乘为衍母，从而原来同余组可以借助孙子定理得解，其中求定母是关键问题。关氏诸约之术也以互约术、逐约术居先，足见关氏也认识到这一着的关键意义，与秦氏正所见略同。

综观《括要算法》逐约术中的例1、例3秦氏称为元数，例2为复数，关氏两数同术，无元数、复数之分，是其长处。又在连环求等中以互约术为其基本运算。关氏互约术无秦氏所定奇、偶(位)之分，因此也不存在"反约"。互约术例1言之甚详。两数m_1，m_2求等(如得d)后，即任约其一，如果$\left(\frac{m_1}{d},\ m_2\right)=1$，就以$\frac{m_1}{d}$，$m_2$为定母。如果$\left(\frac{m_1}{d},\ m_2\right)=d'\neq 1$，就以$\frac{m_1}{d}d'$，$\frac{m_2}{d'}$为定母。关氏还在

① 例如(112，126)＝14，如视126为偶位，以14约奇位112得8。而(8，126)＝2，就反约：112视为偶位，改以14约奇位的126得9，得(9，112)＝1。9，112就是所求的定母。

② 例如(54，72)＝18，如视72为偶位，约奇弗约偶，得(3，72)＝3≠1反约，约偶弗约奇，得(54，4)＝2≠1，这就是秦氏所谓"皆约"。这里的2既是类数，也是续等。秦氏所说"以续等约彼"，$\frac{54}{2}=27$，"必复乘此"：$4\times2=8$，"乃得定数"：27，8。

③ 例如，四个数54，57，75，72，(54，57，75，72)＝3，"总等"是3，"存一位、约众位"，把原来四个数变换为54，19，25，24，把前后两组数看成有相同的定母，后者就按元数求定母，得定母是27，19，25，8。但是秦氏没有明确在有"总等"的已给复数中，应该存哪一位，然后约众位。因此失误难免。如
{54，19，25，24}≠{18，57，25，24}
那么，从两组数所得定母就不会相同了。

例1术文自注中说"后效之"，这就是说如果$\left(\frac{m_1}{d}d', \frac{m_2}{d'}\right)=d''\neq1$，还可以仿(效)此继续进行下去。

关于各元数最小公倍数求法，秦氏说"以定(母)相乘为衍母"，而关氏齐约术求法简便，并符合数论

$\{a, b, c, \cdots, d\}=\{\{a, b\}, c, \cdots, d\}$之理。

关于几个元数最大公约数求法，秦氏无一定法则，而关氏遍约术已符合数论

$(a, b, c, \cdots, d)=((a, b), c, \cdots d)$之理。

关孝和生当我国明清之交，大衍求一术在我中华正万马俱喑，绝学沦亡之际，不意东邻扶桑异军突起，此学大放奇彩，关氏工作与一百多年后黄宗宪《求一术通解》(1804)所释程序竟相一致。

《括要算法》翦管术九例中，其前五例立术同中算而数据则全异。后四例则中算史无前例，可谓后来居上之作。

大衍术与欧洲的不定分析*

白　尚　恕

关于不定分析问题，在欧洲最早见于里昂纳多的著作。

里昂纳多(Leonardo)又称为斐波纳契(Fibonacci)，意大利著名数学家，生于1170年，卒于1250年，生活于比萨(Pisano)。早年跟随他的父亲求学于非洲。及长，曾到埃及、叙利亚、希腊、西西里以及法国南部游学，并以掌握当时全部数学知识而闻名。回到意大利后，便从事著作，于1202年出版了由阿拉伯文、希腊文编译成拉丁文的数学著作《算术(Liber Abaci)》。在书中记载了一些不定分析的问题。例如其中一题为：

"设计一个数，除以3，除以5，也除以7，并问每除之后各剩余多少。对于除以3所剩余的每个单位1，要记住70；对于除以5所剩余的每个单位1，要记住21；对于除以7所剩余的每个单位1，要记住15。这样的数如大于105，则减去105，其剩余就是所设计的数。例如：设一数除以3余2，记住70的二倍或140，其中减去105，则剩余35。若除以5余3，记住21的三倍或63，与上述35相加得98；若除以7余4，记住15的4倍或60，与上述98相加则得158，减去105，其剩余是53。这就是所设计的

* 本文有关资料主要采自李倍始(U. Libbrecht)《十三世纪中国数学(Chinese Mathematics in the Thirteenth Century)》一书。(1973)。并参考李倍始编著、白尚恕编译《不定分析发展简史》一文，载《数学史译文集续集》，上海科学技术出版社。(1985)。

数"。

在斐波纳契的《算术》中，只记载了这样一些问题，他既没有给出关于这种问题解法的任何理论，也没有作更多的解释。但这一题与《孙子算经》中物不知数题十分相似，而且模数都是3、5、7，而解题方法也是同出一辙，即使所取的得数也都是问题的最小解。例如《孙子算经》物不知数题及解法为：

"今有物，不知其数。三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二。问物几何。

答曰：二十三。

术曰：三三数之剩二，置一百四十；五五数之剩三，置六十三；七七数之剩二，置三十。并之得二百三十三。以二百一十减之，即得。凡三三数之剩一，则置七十；五五数之剩一，则置二十一；七七数之剩一，则置十五。一百六以上，以一百五减之，即得。"

这两问题如此的相似，不能不使人感到惊异。虽然对于斐波那契问题的来源有各种不同的研究报道。但是，斐波那契的大部分问题是来自阿拉伯，这似是无可怀疑的。而中国与阿拉伯国家之间的学术交流在古代较为频繁，其具体情况还应有进一步探讨的必要。

尼可马修斯(H.Nichomachus，公元90年左右)是来自犹太的阿拉伯数学家，他的著作《理论算术》英译时附加了五个问题。这五个问题中的三个，都标有伊萨克(Issca)的印记。根据考证，伊萨克可能就是拜占廷著名数学家兼天文学家阿古尔·伊萨克(Issca Argyros，1318—1372)的名字。即是说，标有印记的一个即第五个问题就是阿古尔问题。今将这一题照录如下：

"如果你希望知道在7与105之间有人记在心里的那个数，你可以用下面的方法把它求出来。让那人先心算：从那数能减去3的多少倍就减去3的多少倍，如果有余数的话，让他说出小于3的余数。当他说出余数时，对于每个单位1，记着70这个数。因

此，如果余数是1，仅记70；如果余数是2，记70的两倍或140；如果余数是零，记着零。必须注意，减后的余数，尤其注意余数不是单位1的情形。然后，让他用同样方法从那数能减去5的多少倍就减去5的多少倍，并让他说出小于5的余数，对于每个单位1取21，使与第一次的得数相加。之后，让他用同样方法减去7，并让他说出小于7的余数，对于每个单位1取15，使所有这些数相加，并由其和能减去105的多少倍就减去105的多少倍。剩余的数就是你所求的数"。

这一问题与《孙子算经》的物不知数题十分相似，不仅所取模数都是3、5、7，而且计算步骤也相同。虽然在已知条件里限于7与105之间，但所求仍属于最小解。在叙述方面，则与斐波那契《算术》中的问题极相类似。就问题的内容来说，则完全一致。因此，可以断言阿古尔问题未尝没有受到斐波那契问题的影响。

19世纪在德国发现了一部德文抄本，经考证，大约是1450年间的遗物，作者不详。由于发现于慕尼黑，一般称为慕尼黑抄本。在慕尼黑抄本里，记载着一些不定分析问题，今照译一题如下：

"我也希望或者他想知道在他的钱库里有多少钱。这样做：让他计算钱数，数之以三，数之以五，数之以七；而且数以3余1，记下70，数以5余1，记下21，数以7余1，记下15。然后把这些数相加，由其和减去基数，基数就是3乘以5再乘以7，是105，能(减)几次就减几次，其剩余的数就是他想的或他钱库的钱数。这例子尽可能不高于基数，即105，并且不要取较大的数"。

由这问题最后一句"这例子尽可能不高于基数，即105，并且不要取较大的数"来看，所计算的数当限制于105以内，这和前述阿古尔问题的要求相一致。因此我们想，慕尼黑抄本的作者可能受到阿古尔问题的影响。在这问题之后，作者对于这问题的解法给出这样的解释：

"按照这种方法做。数以3取70，数以5取21等等。如果你需要数以3的话，使它除以3，若余数为1，你求得以5乘7，这

就是所求的数；可是，若余数大于1，加倍这数，然后除以3，若余数仍大于1，再加同一数。这样一直到余数变为1的时候。同样的方法，如果你需要数以5的话，使它除以5，以3乘7得21，因此，对于数以5来说所求的数是21。如果你需要数以7的话，使它除以7，若余数是1，以3乘5得15，于是对于数以7来说所求的数是15，可以用同样的方法处理其他的数"。

这问题不但十分象阿古尔问题，也很象斐波那契问题和"孙子"问题。由于其中所用的一些词句多属于意大利术语，所以有人认为慕尼黑抄本的问题直接或间接来自斐波那契的问题。假定斐波那契是经由阿拉伯受到中国影响的话，那么可以说慕尼黑抄本的问题也间接地受到中国的影响，但是，有人却力图希望证明欧洲绝对没有受到中国的影响，正如李倍始（U.Libbrecht）说："这是难于理解的。"

德国数学家雷基奥蒙坦（Regiomontanus，其原名为J. Müller，1436—1476）于1463年给他的友人毕安基尼（Bianchini）的信中说："有一个数，它除以17，余数15；除以13，余数11；除以10，余数3。我问你，这是怎样的数。"次年毕安基尼回信说："这问题可以给出很多不同数的解，这些数都适合这一问题，如1103、3313，以及其他的数。可是，我不需要烦琐地求出另外的数"。由此明显地看出毕安基尼不知道一般法则。雷基奥蒙坦在回信中写道："……你适当地求出最小的数为1103，第二个数为3313。这就足够了，因为最小的数是1103，象这样的数有无限多个。如果加上一个用三个因数（以乘法）计算的数，即17、13和10的话，我们可以求得第二个；用同样方法，再加上同一数即得第三个数，等等"。

看来，雷基奥蒙坦是了解一次同余式（组）的完全解，但他并没有说明如何求得了第一个解。很可惜，雷基奥蒙坦没有把他关于同余式的解法系统地描述出来。在不定分析的发展史上，好象短缺了什么似的。

与慕尼黑抄本差不多同时的另一抄本，称为哥庭根抄本，约成书于1550年。其中记载有一些不定分析问题，对于两两互素的模数，可以说给出了完全的解；对于非两两互素的模数来说，没有给出解的一般法则。今将其中有关问题及解法用现代符号摘译如下：

1. 当模数两两互素时：

$N\equiv5(\mathrm{mod}7)\equiv7(\mathrm{mod}8)\equiv6(\mathrm{mod}9)=0(\mathrm{mod}11)$。

解：(1) $8\times9\times11=792$, (2) $7\times9\times11=693$

$792-n\times7=1$, $693-n\times8=5$,

(3) $7\times8\times11=616$ (4) $7\times8\times9=504$

$616-n\times9=4$, $504-n\times11=9$。

(1) 式的余数是1，同余式已经解决了。(2)式的余数是5，它必须"约简"。其方法如下：

$$5+5=10$$
$$\underline{-\ 8}$$
$$2+5=7$$
$$\underline{+\ 5}$$
$$12-8=4$$
$$\underline{+\ 5}$$
$$9-8=1$$

意即

$$693\equiv5(\mathrm{mod}8)$$

$$\underline{693\equiv5(\mathrm{mod}8)}$$
$$2\times\ 693\equiv2(\mathrm{mod}8)$$
$$\underline{693\equiv5(\mathrm{mod}8)}$$
$$3\times\ 693\equiv7(\mathrm{mod}8)$$
$$\underline{693\equiv5(\mathrm{mod}8)}$$
$$4\times\ 693\equiv4(\mathrm{mod}8)$$
$$\underline{693\equiv5(\mathrm{mod}8)}$$
$$5\times\ 693\equiv1(\mathrm{mod}8)$$

仿此，由(3)、(4)可得

$4+4=8$

4

$12-9=3$

4

$7+4=11$

-9

$2+4=6$

4

$10-9=1$

$9+9=18$

-11

$7+9=16$

-11

$5+9=14$

-11

$3+9=12$

-11

1

也就是：

$$616\equiv4(\mathrm{mod}9)$$

$$616\equiv4(\mathrm{mod}9)$$

$$\frac{616\equiv4(\mathrm{mod}9)}{3\times\quad 616\equiv3(\mathrm{mod}9)}$$

$$616\equiv4(\mathrm{mod}9)$$

$$\frac{616\equiv4(\mathrm{mod}9)}{5\times\quad 616\equiv2(\mathrm{mod}9)}$$

$$616\equiv4(\mathrm{mod}9)$$

$$\frac{616\equiv4(\mathrm{mod}9)}{7\times\quad 616\equiv1(\mathrm{mod}9)}$$

$$504\equiv9(\mathrm{mod}11)$$

$$\frac{504\equiv9(\mathrm{mod}11)}{2\times\quad 504\equiv7(\mathrm{mod}11)}$$

$$\begin{array}{rl} & 504\equiv 9(\bmod 11) \\ \hline 3\times & 504\equiv 5(\bmod 11) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 504\equiv 9(\bmod 11) \\ \hline 4\times & 504\equiv 3(\bmod 11) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 504\equiv 9(\bmod 11) \\ \hline 5\times & 504\equiv 1(\bmod 11) \end{array}$$

由上式可知，(2)式合计5个5，(3)式合计7个4，(4)式合计5个9。这就是作者所说计算得(2)式的"劳卡(Loca)"是5，(3)式是7，(4)式是5。作者还就上式作了解释，他以(4)式为例说："如果取504为'约简的数'，则余数为9。如果取其(504)两倍，则余数9也得二倍起来。因之，除以11则余7。其他仿此。"

作者还给予全部解说：

先乘以同余因数：

$792\times 1=792$，　$693\times 5=3465$，　$616\times 7=4312$，

$504\times 5=2520$

再乘以余数：

$792\times 5=3960$，$3465\times 7=24255$，$4312\times 6=25872$，$2520\times 0=0$

其和为：$54087=N$。

作者又进一步说："每一数除以自己的除数则余数为1，此外，可整除以其他除数。在'约简的数'中，乘以其余数后，其余数仍然是其原来的余数。因此，每个'约简的数'除以自己的除数则有一余数，而可整除以其他除数。所以，其和54087除以各除数时，则各有余数。"作者的这段论述，用现代符号表示如下：

$$\begin{array}{r} 3960\equiv 5(\bmod 7)\equiv 0(\bmod 8)\equiv 0(\bmod 9)\equiv 0(\bmod 11) \\ 24255\equiv 0(\bmod 7)\equiv 7(\bmod 8)\equiv 0(\bmod 9)\equiv 0(\bmod 11) \\ 25872\equiv 0(\bmod 7)\equiv 0(\bmod 8)\equiv 6(\bmod 9)\equiv 0(\bmod 11) \\ 2520\equiv 0(\bmod 7)\equiv 0(\bmod 8)\equiv 0(\bmod 9)\equiv 0(\bmod 11) \\ \hline 54087\equiv 5(\bmod 7)\equiv 7(\bmod 8)\equiv 6(\bmod 9)\equiv 0(\bmod 11) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -n\times 5544\equiv 0(\mathrm{mod}7)\equiv 0(\mathrm{mod}8)\equiv 0(\mathrm{mod}9)\equiv 0(\mathrm{mod}11) \\ \hline 4191\equiv 5(\mathrm{mod}7)\equiv 7(\mathrm{mod}8)\equiv 6(\mathrm{mod}9)\equiv 0(\mathrm{mod}11) \end{array}$$

其中$n=9$。

2. 当模数非两两互素时：

$N\equiv 2(\mathrm{mod}6)\equiv 6(\mathrm{mod}8)\equiv 4(\mathrm{mod}10)\equiv 8(\mathrm{mod}14)$。

解法如下： $L.C.M.(6, 8, 10, 14)=840$

$840\div 6=140 \qquad 140\equiv 2(\mathrm{mod}6)$

$840\div 8=105 \qquad 105\equiv 1(\mathrm{mod}8)\rightarrow 630\equiv 6(\mathrm{mod}8)$

$840\div 10=84 \qquad 84\equiv 4(\mathrm{mod}10)$

$840\div 14=60 \qquad 60\equiv 4(\mathrm{mod}14)\rightarrow 120\equiv 8(\mathrm{mod}14)$

$140+630+84+120=974,\ 974-840=134$

这不是一般的方法。正确解法的理由可发现自下列图示：

$$\begin{array}{l} 140\equiv 2(\mathrm{mod}6)\equiv 0(\mathrm{mod}8)\equiv 0(\mathrm{mod}10)\equiv 0(\mathrm{mod}14) \\ 630\equiv 0(\mathrm{mod}6)\equiv 6(\mathrm{mod}8)\equiv 0(\mathrm{mod}10)\equiv 0(\mathrm{mod}14) \\ 84\equiv 0(\mathrm{mod}6)\equiv 0(\mathrm{mod}8)\equiv 4(\mathrm{mod}10)\equiv 0(\mathrm{mod}14) \\ 120\equiv 0(\mathrm{mod}6)\equiv 0(\mathrm{mod}8)\equiv 0(\mathrm{mod}10)\equiv 8(\mathrm{mod}14) \\ \hline 974\equiv 2(\mathrm{mod}6)\equiv 6(\mathrm{mod}8)\equiv 4(\mathrm{mod}10)\equiv 8(\mathrm{mod}14) \end{array}$$

在最后的问题里，作者举例给出问题不可解的原由：

$N\equiv 4(\mathrm{mod}5)\equiv 3(\mathrm{mod}6)\equiv 2(\mathrm{mod}8)\equiv 1(\mathrm{mod}9)$。

这问题模数的最小公倍数是360，而其“衍数”分别是72、60、45、40，因为 6 可整除60，所以$a\times 6\equiv 1\ (\mathrm{mod}60)$是不可解的。

又如3(mod6)$\equiv r$(mod9)中，r只能是0、3或 6， 故知方程3(mod6)$\equiv$1(mod9)是不可解的。很明显，方程3(mod6)$=$2(mod8)也是不可解的，因为前边余数是奇数而后面则是偶数。

看来，哥庭根抄本所论不定分析问题，对模数两两互素的情况，其解法只适合于较小的数，对非两两互素的情况，作者未必十分了解一般可解的条件。

十七世纪初期，线性不定方程的解法再次被法国学者巴歇(C.G.Bachet，1581—1638)所发现。在他的《数学趣味(Proble-

mes plaisans et delectable, qui se font par les nombres)》(1612)中，给出形如

$$Ax+By=C$$

的解。

在狄克逊(L.E.Dickson, 1874—1954)的《数论史(History of the Theory of Numbers)》(1919—1920)中，对巴歇的解法给出了完备而一般的论述。即：

方程 $Ax+By=C$ 的解，可转化为 $Ax+By=1$ 的解，用辗转相除法求A、B的最大公约数：

$A=Bq_1+r_1$ (a) $B=r_1q_2+r_2$ (b)

$r_1=r_2q_3+r_3$ (c) $r_2=r_3q_4+r_4$ (d)

…… ……

假定 $r_4=1$， 则 $r_2=r_3q_4+1$，

而 $r_2r_3+1-r_2=r_2(r_3-1)+1=r_3(r_3q_4+q_4+1)$，

即 $r_2r_3+1-r_2\equiv1(\mathrm{mod}\,r_2)\equiv0(\mathrm{mod}\,r_3)$。 (1)

今取 $\alpha=r_3q_4-q_4+1$， $\beta=r_3-1$

上式可为 $\alpha r_3=\beta r_2+1$， (2)

以 α 乘(c)得 $\alpha r_1=\alpha r_2q_3+\alpha r_3$，

以(2)代入得 $\alpha r_1=r_2(\alpha q_3+\beta)+1$。

又取 $\gamma=\alpha q_3+\beta$，

上式可为 $\alpha r_1=\gamma r_2+1$。 (3)

以 γ 乘(b)得 $\gamma B=\gamma r_1q_2+\gamma r_2$

以(3)代入得 $\gamma B=(\gamma q_2+\alpha)r_1-1$。

又取 $\delta=\gamma q_2+\alpha$，

得 $\delta r_1=\gamma B+1$。 (4)

以 δ 乘(a)得 $\delta A=\delta Bq_1+\delta r_1$。

以(4)代入得 $\delta A=(\delta q_1+\gamma)B+1$

对比原式，则得 $x=\delta$， $y=\delta q_1+\gamma$。

在巴歇的著作中，还有一些余数问题，如："问这样的数，它

除以 2 时，余数为 1；当除以 3 时，余数为 1；当除以4、5或 6 时，同样余数为 1；但是，当除以 7 时，则无余数。"

巴歇所论述的问题可变为：$N \equiv 1 \pmod{60} \equiv 0 \pmod{7}$，其中 $60=(2、3、4、5、6)$的最小公倍数，但可解的条件是2、3、4、5、6互素于 7 。巴歇并给出这条件的证明。

关于他的方法，他说："因为问题的结构较难，且(它的)证明也太长，我不想概括在这里。所以一直等到在我的书《算术原理》里发表，你可以用小的反复试验的方法推求这个数。你必需两倍、三倍、四倍以及60倍，直到你求得这个数，然后加 1 ，就是 7 的倍数。如此，60 乘以 5 其积为 300；加 1 则为 301，这数就求到了"。

另外，他给出的问题是：$N \equiv 1 \pmod{2} \equiv 2 \pmod{3} \equiv 3 \pmod{4} \equiv 4 \pmod{5} \equiv 5 \pmod{6} \equiv 0 \pmod{7}$，其解是$N=\alpha \times 60-1=\beta \times 7+1$或者$2 \times 60=17 \times 7+1$及$N=119$。

巴歇所论 $Ax+By=C$ 的解法，与印度库塔卡(Kuttaka)法十分相似；前一余数问题则与斐波那契的问题完全一样。

十七世纪，荷兰数学家斯库廷(Frans Van Schooten，？—1660)的著作《数学实习 I (Exercitationum Mathematicarum Liber Primus)》于1657 年出版，这书主要是用解析几何的方法解决一些引人入胜的和一些疑难的问题，书中也涉及一些不定分析的问题。例如这书第407页开始有一章，其章名为"一数除以已知数留下某余数，求此数的方法。"

斯库廷解决两道余数问题，用现代符号表示如下：

第一道题是：$N \equiv 1 \pmod{2} \equiv 1 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{5} \equiv 0 \pmod{7}$。他给了一般的式子：$dz=au+1=bx+1=cy+1$，由此可得$dz-1=au+bx+cy$。

他所给的解：

$2 \times 3 \times 5=30$		$30+1=31$	不能整除以 7
$(\times 2)$	$=60$	$60+1=61$	不能整除以 7

$(\times 3) \qquad = 90 \qquad 90+1=91$ 　　可整除以 7

但，他说这种做法显得太长：

$30=4\times7+2$，$90=12\times7+6$，$91=12\times7+7$.

由于210是2、3、5、7的最小公倍数，另一解加上210即可求得。这问题固然是特殊问题之一，而此法不能用于一般情况。

在第二道问题中，

$$N\equiv2(\text{mod}7)\equiv1(\text{mod}11)\equiv9(\text{mod}13)$$

或

$$7x+2=11y+1=13z+9.$$

求得

$$7x+1=11y=13z+8.$$

取11的倍数，则有

11倍－1＝7倍，11倍－8＝13倍。

于是他取99，但他没有说为什么，

$99-1=98=7$倍，$99-8=91=13$倍。

由此，可以导出：

$$7x+2=98+2=100,$$
$$11y+1=99+1=100,$$
$$13z+9=91+9=100,$$

以及$N=100+n\times1001$，而1001是7、11、13的最小公倍数。

斯库廷在他的著作里，论述了"大衍"术，他指明是在与休伯特(Nicolaus Huberti)在当时的通信中得到的，是休伯特的研究成果。他用所谓休伯特的方法实即"大衍"术重新论述了这两道问题。用现代符号表示如下：

1. $L.C.M.(2,3,5,7)=210$,

$210\div2=105$，$105\div2=52$……1(余数1)，

$210\div3=70$，　$70\div3=23$……1(余数1)，

$210\div5=42$，　$42\div5=8$ ……2(余数2)，

$210\div7=30$，　$30\div7=4$ ……2(余数2)。

如果余数不为1，为了使余数为1，必须推求其倍数。

在$a\times42\equiv1(\text{mod}5)$中，他求得$a=3$；在$b\times30\equiv1(\text{mod}7)$中，

他取$b=4$.故有：

除数	余数	"乘数"	乘积
2	1	105	105
3	1	70	70
5	1	126	126
7	0	120	0

$$301-n\times210=91.$$

2. $L.C.M.(7,11,13)=1001$,

$1001\div7=143$, $143\div7=20\cdots\cdots3$(余数3)

$\alpha\times143\equiv3(\bmod 7)$ → $\alpha=5$, $5\times143=715$;

$1001\div11=91$, $91\div11=8\cdots\cdots3$(余数3)

$\beta\times91\equiv3(\bmod 11)$ → $\beta=4$, $4\times91=364$;

$1001\div13=77$, $77\div13=5\cdots\cdots12$(余数12)

$\gamma\times77\equiv12(\bmod 13)$ → $\gamma=12$, $12\times77=924$.

故有

除数	余数	"乘数"	乘积
7	2	715	1430
11	1	364	364
13	9	924	8316

$$10110-n\times1001=100.$$

很明显，虽然斯库廷所采用的解法是吸收了休伯特的研究成果，但其解法与"大衍"术是十分相似的。所以休伯特解法的渊源似有进一步探讨的必要。

不久之后，在英国出版了拜威奇(William Beveridge)的著作，其中概括了互素模数剩余问题的全部解说。所论情况如下：

问题是这样："求一数P，当它除以已知的互素数A，B时，其余数分别是K、C"，一个更一般的问题是："求一数O，当它除以已知的非互素数M、B、A时，其余数分别是K、L、Z"。

所给的法则是："先求得B的最小倍数D，当它除以A时，其余数为单位1，再求得A的最小倍数C，当它除以B时，余数也是1"。于是

$$D=\alpha\times B\equiv 1(\mathrm{mod}A),$$
$$C=\beta\times A\equiv 1(\mathrm{mod}B).$$

其中α、β是尽可能较小的数，但没有方法求得α、β.

因之，求乘积DK和CL并且“乘积DK与CL的和除以$F(=A\times B)$而余数为P…”.$P=DK+CL-n\times AB$.

拜威奇所给出的证明大略如下：

$$D=\alpha\times B\equiv 1(\mathrm{mod}A),$$
$$D-1\equiv 0(\mathrm{mod}A).$$
$$DK-K\equiv 0(\mathrm{mod}AK)\equiv 0(\mathrm{mod}A).$$
$$DK\equiv K(\mathrm{mod}A).$$

同理可得
$$C=\beta\times A\equiv 0(\mathrm{mod}A),$$
$$CL\equiv 0(\mathrm{mod}A),$$

于是
$$DK+CL\equiv K(\mathrm{mod}A)+0(\mathrm{mod}A)\equiv K(\mathrm{mod}A).$$

用同样方法，$DK+CL\equiv L(\mathrm{mod}B)$，由此，$DK+CL\equiv K(\mathrm{mod}A)\equiv L(\mathrm{mod}B)$.

由于$AB\equiv 0(\mathrm{mod}A)\equiv 0(\mathrm{mod}B)$，当$DK+CL$除以$AB$时，可求到最小的数$P$，余数是最小的解：$P=DK+CL-m\times AB$（$m$是尽量大的数），而第二个问题给出了类似的证明。

在拜威奇之前的欧洲，关于不定分析的记载，多是与“孙子”问题相似的剩余问题，其解法有的同于《孙子算经》的解法，有的则同于秦九韶的大衍术。对于解法的理论则多缺乏解说。在拜威奇之后，欧洲人才逐渐企图给出代数的证明。直到1783年，数学大师欧拉(L. Euler, 1707—1783)在他的《分析短论》中，才给出同余理论的论述。后来，德国著名数学家高斯(C. F. Gauss, 1777—1855)参考了欧拉的论述，于1801年给出了完全而正确的同余式解法以及同余理论，并发表在他的《算术探讨》中。秦九韶的大衍术与高斯解法在理论上是一致的，但比高斯早554年。

至于欧洲剩余问题的起因及渊源，仍是很有探讨价值的问题之一。

欧洲人不太了解中国数学，直到1839年，毕欧(E. Biot)在《亚洲杂志(Journal Asiatique)》上发表了一篇文章，这是关于中国剩余问题在欧洲最早的直接报道，但未引起注意。1852年，伟烈亚力(A. Wylie, 1815—1887)在《字林西报(North China Herald)》上发表了《中国科学的记述》一文，这是第一次把秦九韶的大衍术及其第一道题的解说和其他题的记注向欧洲的报道。由于伟烈亚力没有通读过《数书九章》，报道中难免有些错简。但对欧州人开拓研究中国数学是有很大功绩的。

1856年，毕尔那茨基(K. L. Biernatzki)根据伟烈亚力的文章译为德文，由于译者的疏忽，这篇译文里出现了不少漏译和误译之处，以致由此在欧洲对大衍术产生一些误解。

1858年，坎托尔(M. Cantor, 1829—1920)出版了他的《关于数学的历史》，他曾参考了毕尔那茨基的译文，由于毕尔那茨基的错误而导致了坎托尔的错误结果。在1875年，德国学者马蒂生(L.Matthiessen, 1830—1906)给坎托尔的信里才订正了毕尔那茨基的错误，并指出大衍术与高斯解法是等价的。1880年，坎托尔改正错误承认大衍术是正确的。从而使人对大衍术有了进一步的了解。

根据毕尔那茨基的译文，1863年法人托里凯姆(O. Terquem)译为法文，题名为《中国的算术与代数》；1869年贝尔唐(J. Bertrand)也译为法文，题名为《中国数学》；1874年汉克尔(H.Hankel, 1839—1873)出版了他的《古代及中古数学史》，在附录里论述了中国数学。这些文献里都不同程度地出现了错误，这些错误都是因循了毕尔那茨基的错误。

虽然马蒂生纠正了毕尔那茨基的一些错误，但是，在马蒂生1876年的论文里也出现了一些错误。由于伟烈亚力把一行写成“壬、星(Yin Hing)”，把《易经》译为“玉京(Yin King)”，毕尔那茨基把这两个名词译成“一京(I King)，以致马蒂生把秦九韶的功绩归功于一行和尚了。尽管如此，马蒂生对大衍术在欧洲的传

播起到了应有的作用。

在1912年，数学史家史密斯（D. E. Smith，1860—？）在英国《数学月刊》上发表了他的《中国数学》一文，在文中他承认了中国数学具有自己的特色，并卫护中国数学未受印度数学影响的观点，也说明欧洲的不定分析必是渊源于东方。到1931年，史密斯发表了《中国数学的不定问题》，弥补了他在1923—1925年出版的《数学史》中对中国数学报道的不足之处。

在苏联，数学史家尤什凯维奇（А. Л. Юшкевич）于1955年发表了《论中国学者在数学领域内的成就》，1960年出版了《中世纪东方的数学》，1961年出版了《中世纪数学史》。1980年别辽兹金娜（Э. И. Березкина）出版了《中国古代数学》，在这些著述中，都论及中国的不定分析问题。

1973年，比利时数学史家李倍始（U. Libbrecht）在美国出版了《十三世纪中国数学》一书，书中不仅全面而系统地介绍了秦九韶的《数书九章》，而且正确地论述了秦九韶大衍术，也纠正了在欧洲流传的一些错误论点。从而开拓了欧洲正确理解大衍术的新纪元。

《数书九章》中的天文问题

沈　康　身

《数书九章》八十一道算题中很多是从生产、生活实际引入。在天文历法方面也有多处论述。秦九韶在此书序中说："独大衍法不载《九章(算术)》，未能有推之者。历家演法颇用之，以为方程者误也。"他又谦虚说自己"愚陋，不闲(娴)于艺，然早岁侍亲中都(临安)因得访习于太史(国家历局官员)。又尝从隐君子学数学。……肆意其间，……探索杳渺，粗若有得焉。"我国天文历算之学在十三世纪之时居世界先进行列。有宋一代天文活动频繁，先后修历多达二十次。但天文用词诘屈聱牙，后学视为畏途，《宋史》天文志，律历志共达二十七卷，数据多若繁星，而历家罕示推导过程。在天文历算领域内秦九韶能尽发所学："设为问答，以拟于用。积多、惜其弃。……立术具草，间以图发之，恐或可备博学多识君子之余观，曲艺可遂也。"秦氏此举，嘉惠后学，实非浅鲜。

八十一题中牵涉天文者计：

第1卷第2题"古历会积"，第3卷第1题"推气治历"，第2题"治历推闰"，第3题"治历演纪"，第4题"缀术推星"，第4卷第1题"揆日究微"。就题数说只六题，就篇幅说，题文、术文、草文占全书12.9%。后人对这六个题尤多诠释。以宋景昌《数书九章札记》四卷来说，其中对这类问题的议论竟占49.6%。所论天文问题可分五方面：1.调日法，2.推算冬至点发生时刻，3.推算圭表给定影长发生时刻，4.求行星速度，5.求上元积年时间。

1. 调 日 法

如何用一合适的分数以表示朔望月、回归年不足一天的时间，历来是我国天文学家十分重视的问题。所谓合适的分数是指分子、分母都比较小，而与实测数据的误差也较小。在调整过程中先确定分母(法)，所以这种调整称为调日法①。"治历演纪"题记南宋鲍瀚之所修开禧历日法选用16900。术文说："调日法，如何承天术，用强弱母子互乘，得数，并之为朔余。"从草文看，秦九韶采用何承天朔望月日数的分数部分强率$\frac{26}{49}$，弱率$\frac{9}{17}$，并假设朔余②$=26m+9n$，其m、n确定方法是：

$$16900=169\times100=169\times(49\times1+17\times3)$$
$$=169\times49+507\times17.$$

如选用$m=169$，$n=507$，朔余偏小。就调整507：$507\div49=10$余17，那么

$$16900=339\times49+17\times17,\text{改取}$$
$$m=339,\quad n=17,$$

朔余就取 8967③，即一个朔望月天数为$29\frac{8967}{16900}$.

秦九韶又从统天历(1199年)所实测回归年时间365.2431计算岁余④

$$0.2431\times16900\doteq4108.$$

即一个回归年天数为$365\frac{4108}{16900}$.

---

① 注意这三个字，调是动词，日法是补语，义：不足一天时间的分母。
② 朔余这里指朔望月不足一天分数的分子。
③ 详见李継闵："调日法源流考"。
④ 岁余这里是指回归年不足一天分数的分子。

2. 推算冬至发生时刻

"推气治历"题说"庆元四年戊午(公元 1198 年)冬至在甲子日后 39.9245 日，绍定三年庚寅(公元 1230 年)冬至在甲子日后 32.9412日。要求借此推算嘉泰四年甲子(公元1204年)冬至时刻，并求岁余①。"

原题术文是先推算岁余。从庆元四年至绍定三年共经 33 年"为法"，以32.9412－39.9245＋60＝53.0167"为率"。又认为：

53.0167÷33≮5"须使商数必得五日以上乃可。今率未得五日，乃两度累加纪法"：

$$32.9412-39.9245+2\times60=173.0167$$

"为实，实如法，除之"

173.0167÷33＝5.24293030"为岁余"。

其次，因嘉泰甲子年上距庆元四年计 6 年，所以冬至时刻应向后移

$$5.24293030\times6=31.45758180(\text{日})。$$

嘉泰四年甲子冬至时刻发生在甲子后

$$39.9245+31.45758180=71.38208180(\text{日})。$$

术文说："满纪法六十，去之"，这就是说

$$71.38208180-60=11.38208180$$

"为所求甲子年气骨②之数"。

秦九韶所拟算法事实上就是在推算回归年日数周期与甲子日数周期的互换关系，如图中计算。

假设第一次实测冬至时刻在甲子日后a_1日，第二次实测冬至时刻在甲子日后a_2日。又前后两次实测相距r年，所求年上距第一次实测相距s年，又设岁余是t日，那么

① 岁余，这里是指回归年与360日的差数。

② 气骨，这里是指冬至时刻在最接近甲子日(凌晨子正起算)之后时间。

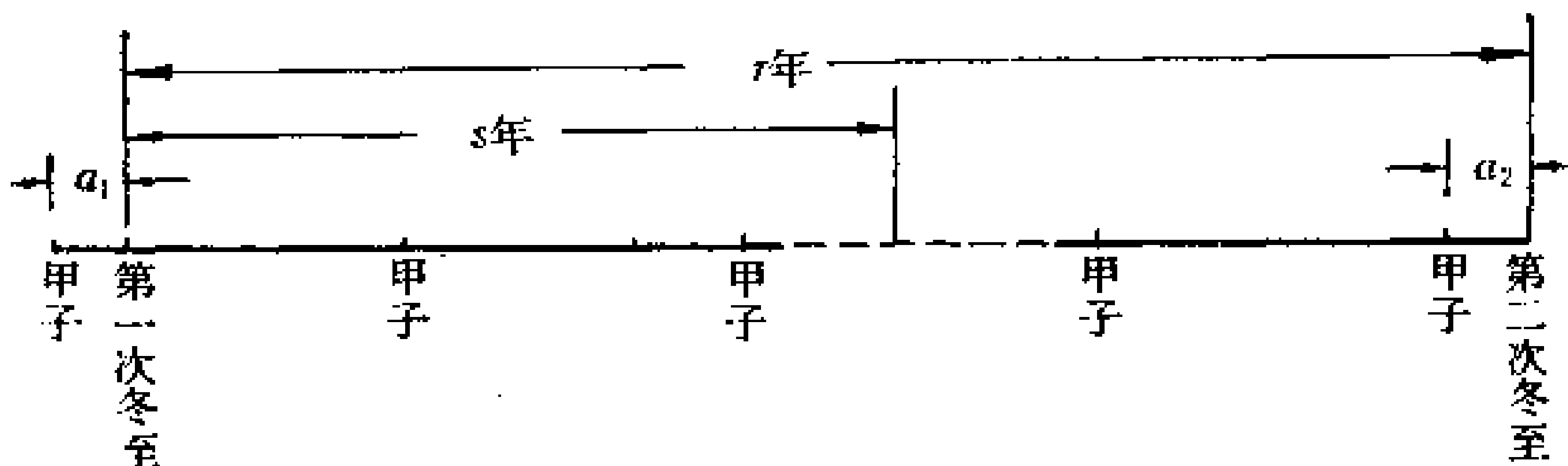


图 1

$$a_2-a_1\equiv(360+t)r\equiv tr\pmod{60}，因此$$

$$t=\frac{a_2-a_1+60m}{r}，而5<t<6，$$

本题选$m=2$。

其次，所求年冬至时刻在最接近的甲子后时间，就是求n，使

$$a_1+st\equiv n\pmod{60}\qquad 0<n<60.$$

3. 推算圭表给定影长发生时刻

《周髀算经》卷上和《刘徽注九章算术序》都有圭表测影记录。当时用垂直于地面的高八尺表，在中午测日影长，用日影长度来定义每年二十四节气，这是治历各家重要参数。经后世研究，冬至日中午影长(s_w)与夏至日中午影长(s_s)与地球对黄道倾角(ε)、所测地点地理纬度(φ)有以下关系：

$$\frac{s_s}{h}=\mathrm{tg}(\varphi-\varepsilon)，\frac{s_w}{h}=\mathrm{tg}(\varphi+\varepsilon)，也就是说$$

(1) $\varphi=\left(\mathrm{arctg}\frac{s_w}{h}+\mathrm{arctg}\frac{s_s}{h}\right)\div 2$,

(2) $\varepsilon=\left(\mathrm{arctg}\frac{s_w}{h}-\mathrm{arctg}\frac{s_s}{h}\right)\div 2$.

这里h指表高(图2)。

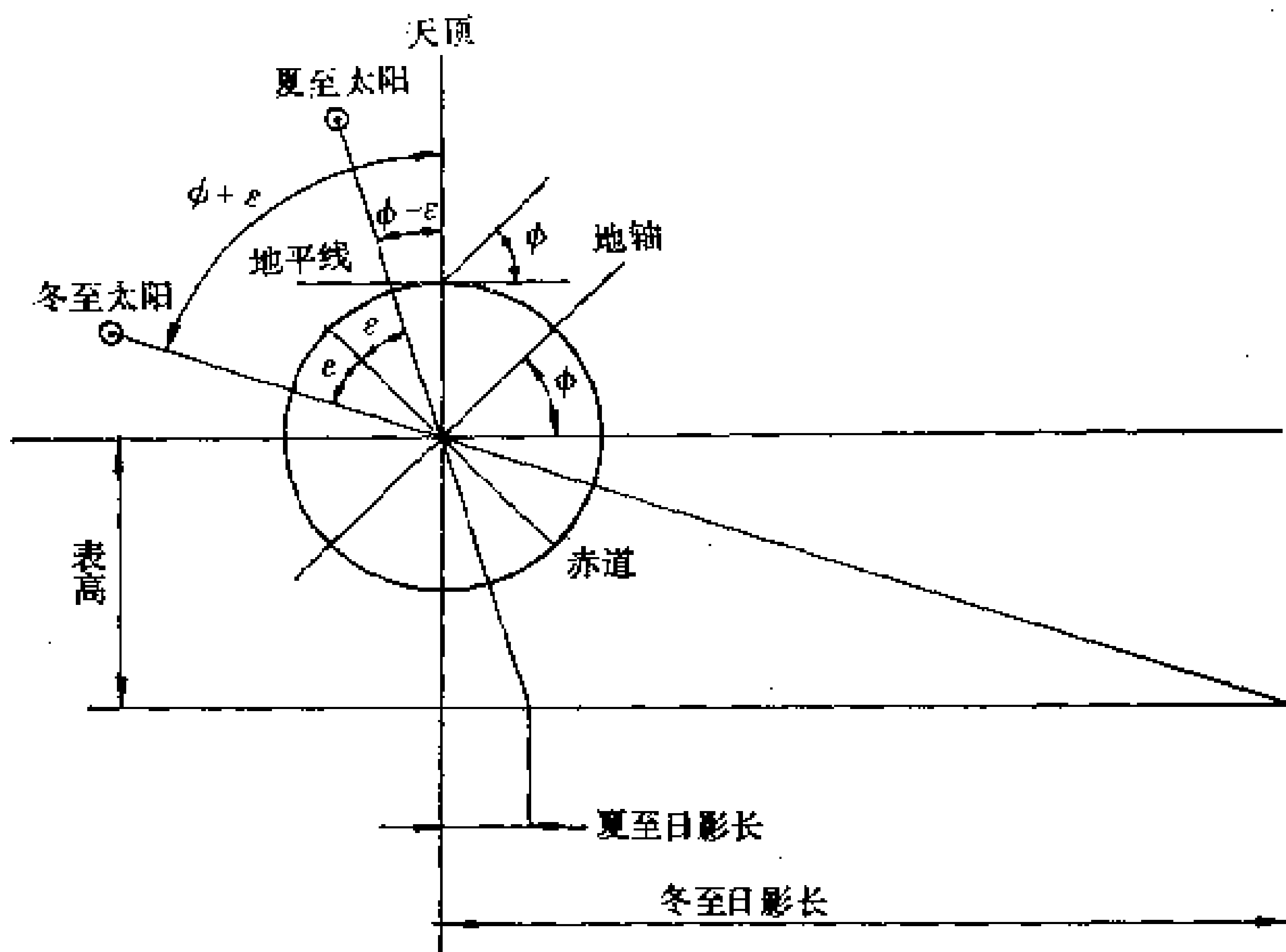


图 2

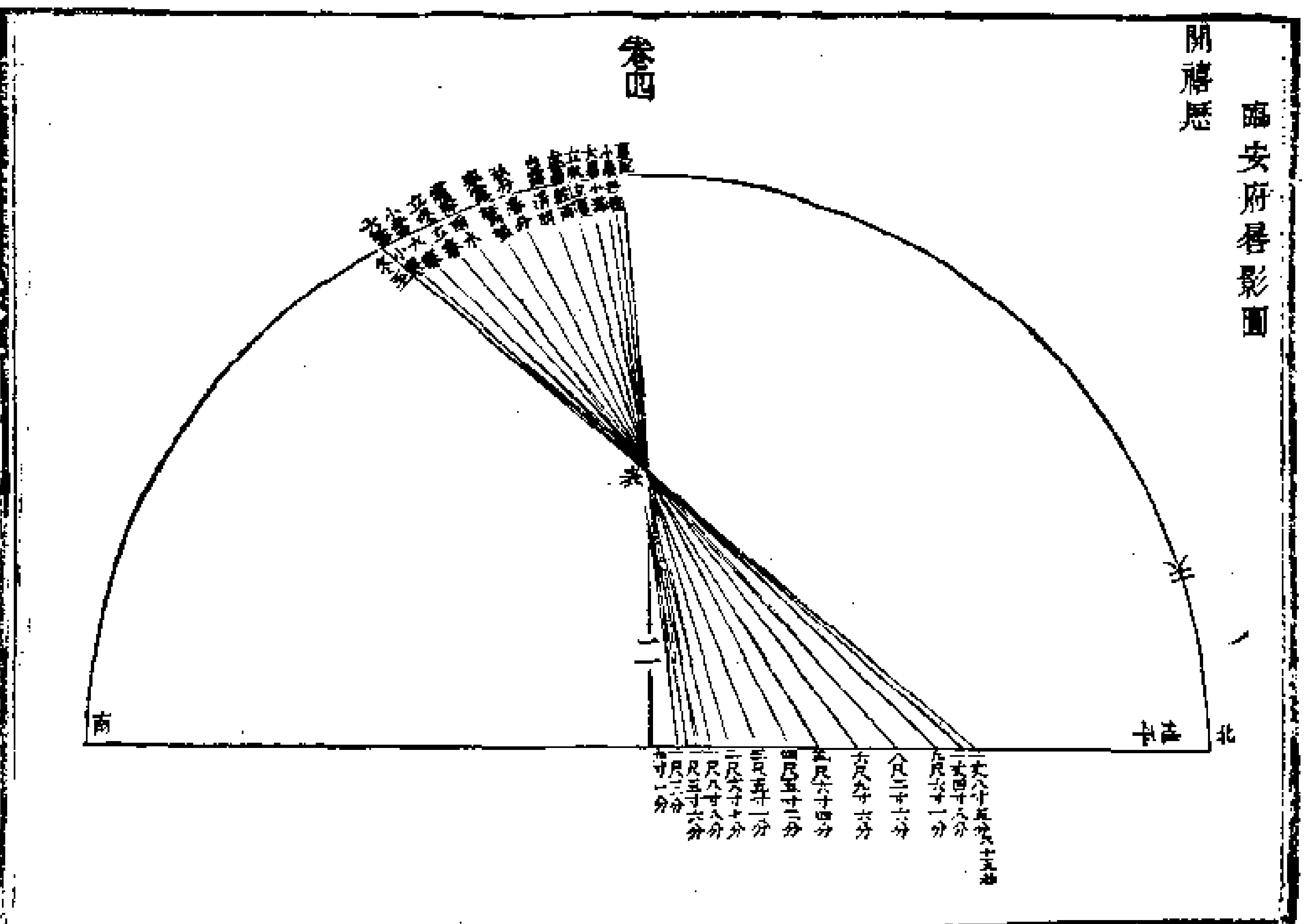
又经美国天文学家纽康(S. Newcomb, 1835—1909)从天体力学理论推导，地球对黄道倾角(ε)是时间T的函数

(3) $\varepsilon=f(T)=23°27'08''.26-46''.845T-0''.0059T^2-0''.00181T^3$.

这里T是从1900年向后起算的世纪数。

我国历代天文家实测日影数据记录数量多、质量高，深受明末清初来华外国传教士注意。法国人宋君荣(P. A. Gaubil, 1688—1759年)在清宫廷工作，注意收集这些数据并加计算，于1734年寄回法国，为数学家拉普拉斯(P. S. Laplace, 1749—1827)著名论文《论黄道倾角值缓慢减小》① 提供重要实据，宋君荣的工作作

① P. S. Laplace, "Memoire Sar La Diminution de l'Obliquité de l'Ecliptique, qui résulte de Observations anciennes"《Connaissance du Temps》, 1811.



臨安府晷影圖
開禧曆
卷四
南
北
地平
表
一尺二分
一尺五寸六分
三尺五寸一分
四尺五寸二分
五尺六寸四分
六尺九寸六分
八尺三寸六分
一丈四寸八分

图 3

为这一论文的附录发表。李约瑟博士从我国历代实测二至日影长算出的ε值和纽康理论曲线相比较，他赞叹说："我们可以看到古代和中古代天文学家们的观测工作做得多么好。"①

"揆日究微"题记修开禧历时（1204年）在临安府（今杭州市）实测二十四节气八尺表日影长（图3）。

图中我们查得

$$s_s = 0.91(\text{尺}),$$
$$s_w = 10.8025(\text{尺}).$$

从公式(1)、(2)可计算出

$$\varphi = 30°00'29'',$$
$$\varepsilon = 23°31'09''(1204\text{年}).$$

又从公式(3)，用$T=-12$代入，可以求出1204年理论值

$$\varepsilon = 23°36'30''.$$

今杭州市实测纬度

$$\varphi = 30°20'10'',$$

二者相对误差分别为

$$e_\varepsilon = 0.38\%,\quad e_\varphi = 1.09\%.$$

可见当时圭表测影的精度。

"揆日究微"题还要求"临安府大暑后多少时间(t)才与阳城（今河南省登封县郜成镇，古称地中）夏至日影（1.4779尺）长相同。"在本题术文和草文中秦九韶用四次对分插入法，计算结果，他从临安大暑影长s_d，立秋影长s_l起算$s_{\mathrm{I}}=\dfrac{s_d+s_l}{2}$对照已有数据与大暑后九天影长$s_9$相近：$s_{\mathrm{I}} \doteq s_9$. 仿此做第二次对分

$$s_{\mathrm{II}} = \frac{s_d + s_{\mathrm{I}}}{2} \doteq s_5,$$

$$s_{\mathrm{III}} = \frac{s_d + s_{\mathrm{II}}}{2} \doteq s_3,$$

---

① 李约瑟，《中国科学技术史》，第四卷第二十章第七节天文仪器的发展，表和圭。

$$s_{\text{IV}}=\frac{s_{\text{II}}+s_{\text{III}}}{2}\doteq s_4.$$

s_{IV}就与阳城夏至日影长用平均插入法计算不足一天的时间：

$$\frac{1.4779-1.4560875}{1.48855-1.4560875}\times 12=8.064\doteq 8(\text{时辰})。$$

所以草文中说："命大暑后四日午后数八辰，得大暑五日寅时影①与阳城夏至之日午影等。"

本题题文并无大暑立秋间每日日影长纪录，那么凭以对照的逐日日影长记录如s_3、s_4、s_5、s_9又从何而来？我们认为招差术在唐代已很熟练，很有可能秦氏从开禧历实测夏至、小暑、大暑、立秋四个日影记录用等间距插入法以获得逐日影长。我们计算如下：

$f(a)$实测影长	$\Delta f(a)$	$\Delta^2 f(a)$	$\Delta^3 f(a)$
夏至 0.91	0.12	0.2087	0.018
小暑 1.03	0.3287	0.1907	
大暑 1.3587②	0.5194		
立秋 1.8781③			

从立秋起算反推立秋前n日日影长$f\left(a+\frac{n}{l}\right)$，$l=15$，三次等间距插入公式是

$$f\left(a+\frac{n}{l}\right)\doteq f(a)+\frac{n}{l}\Delta f(a)+\frac{n}{2!\,l}\left(\frac{n}{l}-1\right)\Delta^2 f(a)$$

$$+\frac{n}{3!\,l}\left(\frac{n}{l}-1\right)\left(\frac{n}{l}-2\right)\Delta^3 f(a).④$$

---

① 从四日中午（午时）起算八个时辰，历、未、申、酉、戌、亥、辰、巳至第五日寅时止。

②③ 此二数据为秦九韶推算值，与实测值略有出入。

④ 严敦杰，"中算家的招差术"，《数学通报》，1955年第1期，4—13页。

按照我国排年、月、日习惯，所谓落地一岁、章文大暑后九日，n应作 7 计，余类推。

大暑至立秋间日影长

大暑后天数	1	2	3	4	5
立秋前天数(n)	15	14	13	12	11
二次插入影长	1.3587	1.387394	1.416935	1.447324	1.465847
三次插入影长(s_n)	1.3587	1.387590	1.417327	1.447900	1.466590
对分插入影长			$S_{Ⅲ}$ 1.423625	$S_{Ⅳ}$ 1.4560875	$S_{Ⅱ}$ 1.48855
大暑后天数	6	7	8	9	10
立秋前天数(n)	10	9	8	7	6
二次插入影长	1.510610	1.543576	1.577355	1.611982	1.647450
三次插入影长(s_n)	1.511498	1.544584	1.578450	1.613126	1.648608
对分插入影长				$S_{Ⅰ}$ 1.6184	
大暑后天数	11	12	13	14	立　秋
立秋前天数(n)	5	4	3	2	大　暑
二次插入影长	1.683778				1.8781
三次插入影长(s_n)	1.684889				1.8781
对分插入影长					

4. 求行星速度

“缀术推星”题记载经长期观测所得木星运行记录：

运　　行　　段	共运行时间(日)	共运行角距(度)
合　　伏　　段	$t_1=16.9$	$s_1=3.9090$
顺　　行　　段	$t_2=113.0$	$s_2=17.8383$

借此推算合伏段、顺行段的初速度、末速度和平均速度。

我国古代认为(如唐天文学家张遂)行星是按等加(减)速度运行的，其中如合伏段到顺行段开始是按减速度运行的；如设初日、日速为v_0，合伏段末日、日速为v_1，顺行段末日、日速为v_2，日差(每日加速度)为 a，那么当初速为零时在 t 时间内所运行的角距为：

$$\left|\frac{t(t-1)}{2}a\right|$$ ①

而

$$v_1=v_2+t_2a,$$

$$s_1=v_1t_1+\frac{t_1(t_1-1)}{2}a=(v_2+t_2a)t_1+\frac{t_1(t_1-1)a}{2},$$

$$s_2=v_2t_2+\frac{t_2(t_2-1)}{2}a.$$

本题草文正利用上述公式解得：

$$a=\frac{t_2s_1-t_1s_2}{t_2\frac{t_1(t_1-1)}{2}-t_1\frac{t_2(t_2-1)}{2}}.$$

用题文所给数据代入给出答案：日差 $a=0.00112366$度。术文所说恰是上述运算：“以见日(t_2)乘伏差$\left(\frac{t_1(t_1-1)}{2}\right)$于上，以伏日

① 《旧唐书》卷三十六历志三大衍步五星术。

(t_1) 乘见差$\left(\frac{t_2(t_2-1)}{2}\right)$减上，余为法。以见日乘伏度$(s_1)$，以伏日乘见度$(s_2)$减泛，余为实。实如法而一……得日差。”

5. 求上元积年

“古历会积”、“治历演纪”两题都以讨论相邻两上元①时间和上元积年②为中心议题。我国自先秦四分历(即颛顼历)以后迄元代授时历，都以上元为历法时间起算原点。上元及上元积年虽居历法之首，而具体推算步骤已无据可查。秦九韶以其从事天文工作经验，刻意钻研，对之条分缕析，为数学史、也为天文学史提供可贵文献，正如他在“治历演纪”题术文中说：“所谓方程，正是大衍术，今人少知。……初无定法可传，甚是惑误后学，易失古人之术意。……数理精微，不易窥识，穷年致志，感于梦寐。幸而得之，谨不敢隐。”

“古历会积”题以先秦时已通行的我国第一部历法——四分历为例设立题文。此历定1回归年$=365\frac{1}{4}$日，1朔望月$=29\frac{499}{940}$日。自殷商以来我国以六十为一甲子周期。本题先要求计算四分历上元周期③，其次是已知某年④月朔在甲戌日的$\frac{410}{940}$日，冬至在丁酉日的$\frac{3}{4}$日，要求计算此年的上元积年。

我们知道题文所提第一个要求相当于求日数d，使同时满足

$$d\equiv0(\mathrm{mod}60)\equiv0\left(\mathrm{mod}29\frac{499}{940}\right)^{⑤}\equiv0\left(\mathrm{mod}365\frac{1}{4}\right).$$

---

① 上元，甲子日的开始时刻，子正(0时0分0秒)适逢冬至、月朔，此年称为上元。

② 上元年至修历年相距年数称为上元积年。

③ 相邻两上元时间。

④ 《数书九章》原题文误，已按宋景昌《数书九章札记》引沈钦裴正误改。参见本书“宜稼堂本《数书九章》正误”一文。

⑤ 指求自然数d使被$29\frac{499}{940}$除得整数商，没有余数、余仿此。

本题草文说："置问题冬至三百六十五日四分日之一，朔策二十九日九百四十分之四百九十九，甲子六十日，各通分内子，互乘子，列三等位。"相当于把 d 缩小4×940倍，使分数模数变换成整数，这就是：

$$d=\frac{D}{4\times940}，于是同余组成为$$

$$D\equiv0(\bmod 60\times4\times940)\equiv0(\bmod 365\times4\times940+940)$$

$$\equiv0(\bmod 29\times4\times940+499\times4),$$

$$D\equiv0(\bmod 225600)\equiv0(\bmod 1373340)\equiv0(\bmod 111036).$$

我们知道这同余式组的解就是

$D\equiv$最小公倍数$\{225600，1373340，111036\}=2087476800$，

而题文要求上元周期日数应是

$$d=2087476800\div4\div940=555180(日)，折合$$

$$555180\div29\frac{499}{940}=18800月,$$

$$555180\div365\frac{1}{4}=1520年.$$

沈钦裴据秦氏术文讲得很明确："气分一百三十七万三千三百四十，朔分一十一万一千三十六，纪分二十二万五千六百"三者"衍母二十亿八千七百四十七万六千八百，以气分除衍母得积年，以朔分除衍母得……积月，以纪分除衍母……以六十通之……为积日"即指此。

本题所提第二个问题中已给甲戌日在甲子日后10日，而丁酉日在甲子日后33日，因此问题实在就是从下列同余组求出N年

$$365\frac{1}{4}N\equiv33\frac{3}{4}(\bmod 60)\equiv33\frac{3}{4}-10\frac{410}{940}\left(\bmod 29\frac{499}{940}\right)^{①}$$

如果以4×940乘左右端及模数，各种数据都成为整数，得到同解

① 求整数N使$365\frac{1}{4}N$除以$29\frac{499}{940}$之后，得余数是$33\frac{3}{4}-10\frac{410}{940}$.

同余式组：

$$1373340N \equiv 126900(\mathrm{mod}\,225600) \equiv 87660(\mathrm{mod}\,111036).$$

这就是沈钦裴所说："气分一百三十七万三千三百四十，纪分二十二万五千六百，朔分一十一万一千三十六。一十二万六千九百为气骨，八万七千六百六十为闰骨。"借此算得历过（上元积年）

$$N = 1115(\text{年})。$$

"治历演纪"题又以开禧历为例求嘉泰四年上元积年，题设数据较"古历会积"进一步复杂，但解题原理是相同的。术文相当于说所求上元积年N是下列同余组的解（图4）：

$$365\frac{4108}{16900}N \equiv 11\frac{7540}{16900}(\mathrm{mod}\,60)$$

$$\equiv 11\frac{7540}{16900} - 1\frac{12769}{16900}\left(\mathrm{mod}\,29\frac{8967}{16900}\right).$$

从术文看是用代入法解出①

$$N = 7848180.$$

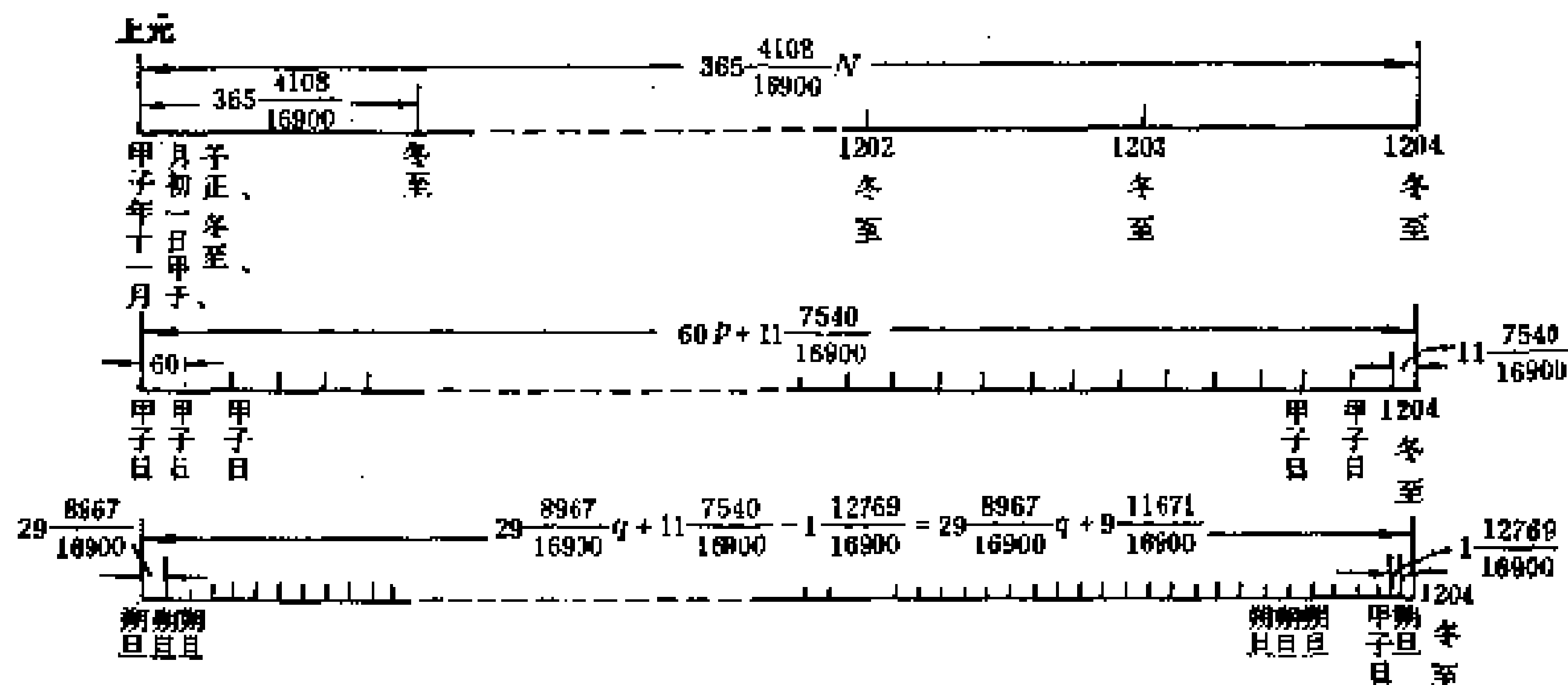


图 4

① 见本书"大衍求一术与库塔卡"一文第2节。

秦九韶关于“调日法”的记述

李　继　闵

调日法是中国古代历算中曾长期使用过的一种独特的分数近似计算法。相传为刘宋时代天算家何承天于推算《元嘉历》（公元443年）时所创，尔后“唐宋演撰家皆墨守其法，无敢失坠。”①可是，到了元代王恂、郭守敬编制《授时历》（公元1280年），从此历法数据普遍采用十进小数表示，调日法因无用武之地而声销迹灭，以致“元明以来，畴人子弟罔识古义，竟无知其说者。”②

近代关于调日法的考证，始于清代李锐之《日法朔余强弱考》（公元1799年）。是书曾被其同代学者奉为“必传之作”③，近世天算史论著对调日法的解释也多本于此。然而，新近的一些研究表明，李锐之说并非“凿凿有据”，他的许多推测都与古法相悖，于理不合④。究其原因，既有失于算理⑤，也因疏于文献。（尤其不应忽视秦九韶关于调日法的记述。）

我国古代流传至今有关调日法的资料，散见于宋代文献，可供征引者主要有三：

一为《宋史·律历志》周琮《明天历》，（公元1064年）；

二为李心传《建炎以来朝野杂记》乙集卷五，（公元1216年）；

三为秦九韶《数书九章》卷三，“治历演纪”题（公元1247年）。

李锐自序中说，他因“读宋史志忽有启悟”而研究调日法，其

① ② 见李锐：《〈日法朔余强弱考〉序》。

③ 李潢称赞：“《日法朔余强弱考》并自序一首尤为抉尽阃奥，皆必传之作，不但与秦氏书为羽翼也。”

④ 见李继闵《“调日法”源流考》，陈久金《调日法研究》等文。

⑤ 关于算理分析，见李继闵《关于“调日法”的数学原理》。

所引证的史料极为简单："何承天调日法，以四十九分之二十六为强率，十七分之九为弱率，累强弱之数，得中平之率，以为日法、朔余。"用语与周琮《明天历》记叙相近。近代的调日法研究者，皆因《明天历》的记录年代最早而对其倍加重视，其实，下文的讨论表明，秦九韶的记述对调日法的研究具有更为珍贵的价值。

(一)

秦九韶以前关于调日法的文献记载十分简略，因而尚存许多疑问难于解答。

《宋史·律历七》周琮《明天历》"调日法"条："后汉刘洪考验四分，于天不合。乃减朔余，苟合时用。自是以降，率意加减，以造日法。宋世何承天更以四十九分之二十六为强率，十七分之九为弱率，于强弱之际，以求日法。承天日法七百五十二，得一十五强，一弱。自后治历者，莫不因承天法，累强弱之数。皆不悟日月有自然会合之数。"

《宋史·律历八》"周琮论历"注文有类似记叙："自《元嘉历》后所立日法，以四十九分之二十六为强率，以十七分之九为弱率，并强弱之数为日法、朔余，自后诸历较之。殊不知日月会合为朔，并朔余虚分为日法，盖自然之理。"

对于周琮的记载，李俨首先提出怀疑："但何承天调日法，《宋书》历志未曾记及，或疑为宋周琮伪造。"①孙炽甫支持"周琮伪造说"，提出理由如下：

(1) 古代历法内最重要的是日法、朔实和岁实，既然日法很重要，但稍后于何承天的祖冲之《大明历议》却没有提及调日法，并且古历上极有名的唐僧一行（公元683——722年）《大衍历议》也没有提到调日法；

---

① 见李俨：《中算家的平方零约术》。

(2) 在周琮《明天历》内除调日法计算外，还有同样的方法，算历法上的其他数字。而且，现在尚未发现周琮以前论调日法的资料，故疑是周琮伪造。①

此外，孙氏还认为，“调日原法已失传，清人李锐推测得一法，与调日法似乎相合，就假定是何承天的调日法了。原法究竟如何？是否何承天创有该法？均宜著疑俟考。”

李心传《建炎以来朝野杂记》乙集卷五记载：“宋何承天考正日晷，知南至之端。又用强弱率以配日立法，以求朔策之余分，乃合简易之要。……建隆二年，始命王处讷造《应天历》。处讷乃用一万二分为日法。(盖用万分增二——原注)得强率二百有一，得弱率九。以二十六乘强率，以九乘弱率。并二者得五千三百七为朔策之余分，则强弱适中，合简易之要，自然无秒。”

仔细对照李心传与周琮的记述，就会发现其间的差异与问题：

(1) 《明天历》中将“调日法”作为一条之专门名称而列出；而李心传只言“用强弱率以配日立法”，叙述中未用“调日法”一语。在历算史上“调日法”是否作为此种分数近似算法的专门术语而通用？特别是何承天是否创造和使用过“调日法”这一术语？

(2) 调日法的要旨在于以$\frac{26}{49}$为强率，$\frac{9}{17}$为弱率，“累强弱之数”而得日法、朔余，即取

$$日法=49m+17n,$$

$$朔余=26m+9n。$$

其中强数m与弱数n皆限于正整数。这里究竟先定日法再由此而求朔余，还是日法、朔余同时由强弱二数确定？似乎李心传的记叙较为明确，先“用强弱率以配日立法”，然后再“以求朔策之余分”。这一点，他以《应天历》为例说得明白。但是，强弱二数如何确定？李心传则未作交代。

因此，“调日法”究竟产生于何时？是否为周琮伪造？调日法

---

① 见孙炽甫：《中国古代数学家关于圆周率研究的成就》。

原术如何？诸如此类的问题，仅从上述史料中是找不到答案的。

（二）

秦九韶关于调日法的记述，见之于《数书九章》“治历演纪”的题、术、草及图中。它是现存关于调日法的最完整的历史文献。

治历演纪题曰：“问开禧历，积年七百八十四万八千一百八十三，欲知推演之原。调日法，求朔余、朔率、斗分、岁率、岁闰、入元岁、入闰、朔定骨、闰泛骨、闰缩、纪率、气元率、元闰、元数，及气等率、因率、蕍率、朔等数、因数、蕍数、朔积年，二十三事，各几何。”

“治历演纪”，是古代在制订历法中推算上元积年的一套完整的演算程序。周琮论历说：“造历之法，必先立元，元正然后定日法，法定然后度周天以定分、至。三者有程，则历可成矣。”可见确定历元与日法，是制定历法的基础，而这些数据彼此密切相关，推算应按一定的步骤。治历演纪即编排了历法一连串数据的推算程序，而调日法仅是其中的一步。

“日法”，是朔望月奇零部分的分母，它作为古历法中的一个重要数据而与“朔余”(朔望月奇零部分的分子)分别加以计算。“调日法”按其原意，即调配日法数据，最初并非一种分数近似法的专名。“演纪”题曰：“调日法，求朔余”，二者相提并论，可见“调日法”并不包含“求朔余”的演算，自然更不能是计算朔望月奇零部分的分数近似法了。其实，周琮的记载也未明确将何承天“累强弱之数”的算法，称之为“调日法”，只是作为《明天历》中一条的标题而已①。把“调日法”②视为一种分数近似法的专名，恐怕是近人的理解。这种看法并不意味着对“周琮伪造说”的支持；恰

---

① 推算历法一般从调整日法开始，而将开头的文句作为全文的标题是合于古人习惯的。

② 严格地说应称为“调日法之术”。

恰相反，我们认为何承天创造了此种分数近似法是很可能的①，但是当时未必称之为"调日法"。

在秦九韶的记述中，调日法仅作为"演纪"的一个步骤，可见在历算中"调日法"通常并不当作一个单独的算法而给予专门的叙述，这大概正是它在历代文献中鲜有记载的缘故。《隋书·律历志》卷十七称："(高祖)及受禅之初，擢(张)宾为华州刺史，使与仪同刘晖……等，议造新历，……宾等依何承天法，微加增损。"其所谓"何承天法"，当指何承天创造的一套天文数据的测算方法，"调日法"很可能作为一个具体算法或步骤包含在其中②。因此，不能因"《宋书》历志未曾记及"而断定"调日法"为周琮伪造。

从秦九韶的叙述中可见，日法数据与其它历法数据来历不同：日法是"调"来的，其它二十二事是"求"得的。"调"与"求"有显著区别。"求"，是由已知数据推算而确定；"调"，则是在一定条件与要求之下自由选取。同时，"调"还包含反复调试的意思，一般不能一次定案。"调日法"究竟如何"调"法，《数书九章》"治历演纪"术、草给出了演算的实例。

其术曰："以历法求之，大衍入之。调日法，如何承天术。用强弱母子互乘，得数，并之，为朔余。"

其草曰："本(开禧)历以何承天术，调得一万六千九百为日法，系三百三十九强，一十七弱。先以强数三百三十九乘强子二十六，得八千八百一十四于上；次以弱数一十七乘弱子九，得一百五十三，并上，共得八千九百六十七为朔余。"

按术、草所述，对照草图，可见其"调日法，求朔余"的具体步骤是：

(1) 适当选取日法，例如《开禧历》选取日法16900；

---

① 关于何承天曾创造此种分数近似法的理由，陈久金《调日法研究》及拙著《"调日法"源流考》皆有所论述。

② 秦氏曰："调日法，如何承天术"。表明"调日法"确实包含在"何承天法"之中。

（2） 由日法求强弱二数，它相当于求一次不定方程之解，例如《开禧历》，调得强数339，弱数17，是下述不定方程之整解：

$$49x+17y=16900;$$

（3） 由强弱二数求朔余，如《开禧历》

$$\text{朔余}=26\times339+9\times17。$$

其中，困难的计算在于求强弱二数，它相当于解不定方程。秦九韶的演草给出一种十分特殊而别致的算法，表现出中算家处理不定分析问题方法的特色。现抄录演草，对照解释如下：

演　　　　草	今　　　　释
日 法 丨⊥𝍨〇〇 分	取日法16900分。
丨〇〇 约以约 之百法 上 丨⊥𝍨 丨 下 丨⊥𝍨 𝍢 三下一上副 因以因以置 上丨⊥𝍨 下𝍤〇𝍦	$16900\div100=169$, 因　$100=49\times1+17\times3$, 于是　$16900=169\times100$ $=169\times(49\times1+17\times3)$ $=(169\times1)\times49+(169\times3)\times17$ $=169\times49+507\times17.$ 此即，日法中含有： 169个强母， 507个弱母。

演　　草	今　　释
三丌 强 母 约以 下强 位母 丨丄丌　丨丄丌 上　上 位　位 丨丄○　一○ 得　得 数　数 一丌　一丌 余　余 一丌 弱 并以乘以 上得得弱 位数数母	$507 \div 49$ $= 10 \cdots\cdots$ 余17 故由16900 $= 169 \times 49 + (10 \times 49 + 17) \times 17$ $= 169 \times 49 + 170 \times 49 + 17 \times 17$ $= (169 + 170) \times 49 + 17 \times 17$ $= 339 \times 49 + 17 \times 17.$ 即将$10 \times 49 = 490$ 个弱母，换为$10 \times 17 = 170$个强母。 于是日法中包含强母个数为： $169 + 170 = 339$； 弱母个数为： $507 - 490 = 17$。
丨三丌 强 数 一丌 弱 数	即得： 强数339， 弱数17。

秦氏上述演算可分为两步：

(1) 利用尾数100含有“一强三弱”的特性，计算出日法16900中含有169个强母，507个弱母，(但嫌太弱，需作必要调整)；

(2) 利用“49个弱母＝17个强母”，将490个弱母换成170个强母，于是得强数339，弱数17，为强弱适中。

这种强弱互换的调整过程，显露出“调日法”的真意。调日法，其调来调去，不外乎是“弱则强之，强则弱之”，即调整强弱二数之比$\frac{m}{n}$，使之控制在一个适当的范围之内，以保证数据的精度。这种方法简便而实用，具有其优越之处，而这也是它能作为一种科学方法在历史上长期使用的价值所在。①

(三)

秦九韶所记述的调日法，与李锐所设计的逐次加成而逼近实测数据的方法不同。李锐之说似属理想，因而得到重视与推崇；而秦氏之法被认为“与累强弱之数的‘累’义不合，当不是调日法本法。”②这种评论是值得商榷的。

《数书九章》的写作年代是在调日法流行之末期，应当说它的记载较之李锐的推测更接近于历史的真实。秦法与李法显著不同之一，是秦法不依赖实际观测。这与有关调日法的文献记载相符。周琮所谓的“皆不悟日月有自然会合之数”，以及《隋书·律历志》有“写子换母”之类的记载，都说明历家常常不依据实测而演撰历法数据的事实。秦法与李法另一个明显的区别，是秦法可预先随意挑选适合需要的日法。古历日法数字的确定要受多方面因素的限制。例如，受闰周的影响，日法一般应选用与章月有公约数者；为了精密与简便，日法数字大小应控制在适当范围并最好取末位为零之整数；受推算上元积年中“乘限”之设的限制；此外，

① 参见拙著《“调日法”源流考》及《关于“调日法”的数学原理》。

② 见严敦杰：《宋金元历法中的数学知识》。

受神秘主义的束缚，日法常采用含有某种吉祥意义的数字。[①]如此等等，要求历家首先从满足这些条件的数字中去选择日法，秦氏的方法适合这种需要。因此有理由认为，秦九韶的记述反映了宋代历家使用调日法的一般情形。

诚然，秦九韶记述的方法并非至善尽美，它首先要遇到“求强弱之数”的麻烦，即一般需要解一次不定方程问题：

$$49x+17y=A。$$

在A为100的整数倍时，秦氏给出了巧妙的解法，但一般情形的解法未能给出。不知他是偏爱这种技巧，还是根本不懂得用求一术来解决这类问题？中算家似乎很晚才认识到一次不定方程问题

原文	今释
求强弱术曰： 置日法以强母去之，	欲解方程$49x+17y=A$，设$A=49K+r_1$，$(0\leqslant r_1<49)$，于是问题归于解：
余以四百四十二（原注：此数以弱母去之适尽，以强母去之余一）乘之，	$17y\equiv r_1 (\mathrm{mod}49)$， 由$442\equiv 1(\mathrm{mod}49)$， $\equiv 0(\mathrm{mod}17)$， 知$442r_1\equiv r_1(\mathrm{mod}49)$， $\equiv 0(\mathrm{mod}17)$。
满八百三十三（原注：此数以强、弱二母去之皆尽）去之，余为弱实。	取 $883=49\times 17$ 设$442r_1=833N+r_2(0\leqslant r_2<833)$， 则$r_2\equiv r_1(\mathrm{mod}49)$ $\equiv 0(\mathrm{mod}17)$。
以弱母除之，得弱数。以弱实转减日法，余为强实。以强母除之，得强数。	取$y_0=\frac{r_2}{17}$，于是代入原方程得 $x_0=\frac{A-r_2}{49}$。 x_0，y_0即为方程之一解。

① 参见拙著《“调日法”源流考》及《从“演纪之法”与“大衍总数术”看秦九韶在算法上的成就》。

与一次同余问题的等价性。①有趣的是李锐的“求强弱术”。使秦氏的方法臻于完善，而它正是中算现存历史文献中用求一术解一次不定方程问题的最早记载。兹照录并对照解释如335页表：

显然，李锐的“求强弱术”已包含解$ax+by=N$型不定方程问题的一般法则。这是中算家在不定分析方面又一个出色的创作。一个令人不解的疑问是，李锐何以要设计“求强弱术”？按李氏的“调日法术”是无须求强弱二数的。纵然是为对《开元占经》及《授时术议》所载五十一家历法“一一考其强弱”，也不必限制于“有日法求强弱”。因为若再利用已知的朔余，问题便归结为简单得多的二元线性方程组：

$$\begin{cases} 49x+17y=A, \\ 26x+9y=B。\end{cases}$$

清代后期的顾观光(公元1799—1862年)注意到这个问题。他在《日法朔余强弱补考》中给出“由日法、朔余求强弱”的一种别开生面的辗转相除法，甚为有趣。

其术曰：“以朔余减日法，得第一数；以第一数减朔余，得第二数；以第二数减第一数，得第三数；以第三数减第二数，得强数；以强数减第三数，得弱数。”

顾氏的算法是正确的，可验证如下：

日　　法	$49m+17n$	$26m+9n$	朔　　余
	$-)26m+9n$	$-)23m+8n$	
第　一　数	$23m+8n$	$3m+n$	第　二　数
	$-)7(3m+n)$	$-)\ 2m+n$	
第　三　数	$2m+n$	m	强　　数
	$-)\ 2m$		
弱　　数	n		

① 正如钱宝琮《中国数学史话》所说：“(中算家)到十九世纪，宋、元数学复兴以后，才有把这个类型的问题和求一术(一次同余式解法)结合起来的讨论。”

中算家关于调日法的研究表现出卓越的数学才能，他们的许多美妙创造令人惊叹不已。毫无疑义，调日法在其行用的八、九百年中必然不断发展演进，历家调整日法数据也自然不拘一法。秦九韶的记述，为“调日法”在古历推算中的应用提供了一个完整的实例，使这一行将湮灭的古法粲然复明，其功绩是在李锐之上的。

参 考 文 献

〔1〕《历代天文律历等志汇编》，中华书局。
〔2〕李心传：《建炎以来朝野杂记》乙集。
〔3〕李锐：《李氏算学遗书》。
〔4〕顾观光：《武陵山人遗书·算剩初编》。
〔5〕宋景昌：《数书九章札记》。
〔6〕朱文鑫：《历法通志》，商务印书馆，1934。
〔7〕李俨：《中算家的平方零约术》，中算史论丛，第一集，科学出版社(1955)。
〔8〕孙炽甫：《中国古代数学家关于圆周率研究的成就》，《初等数学史》，科学技术出版社，1959。
〔9〕严敦杰：《宋金元历法中的数学知识》，《宋元数学史论文集》，科学出版社(1966)。
〔10〕陈遵妫：《中国天文学史》，上海人民出版社，(1980)。
〔11〕中国天文学史整理研究小组：《中国天文学史》，科学出版社，(1981)。
〔12〕陈美东：《论我国古代年、月长度的测定》，中国科技史学会成立大会论文(1980)。
〔13〕李继闵：《中国古代不定分析的成就与特色》，第二届国际中国科技史研讨会论文，(1983，香港)。
〔14〕陈久金：《调日法研究》，《自然科学史研究》第3卷第3期(1984)。
〔15〕李继闵：《“调日法”源流考》，第三届中国科学史国际讨论会论文，(1984，北京)。
〔16〕李继闵：《从“演纪之法”与“大衍总数术”看秦九韶在算法上的成就》，《秦九韶与〈数书九章〉》，北京师范大学出版社，(1987)。
〔17〕李继闵：《关于“调日法”的数学原理》，西北大学学报(自然科学版)，1985年第二期。

秦九韶测望九问造术之探讨*

白 尚 恕

测望之术，其所由来已久，汉时已有句股测望、重差诸术。如《周髀算经》说："偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远"。又陈子对荣方说："望远、起高之术，而子之不能得，则子之于数未能通类。"甄鸾注称："定高、远者，立两表，望悬、邈者，施累矩"。至三国时代，刘徽"辄造重差，并为注解①"。使重差术得到发展。唐王孝通称："徽思极毫芒，触类增长，乃造重差之法，列于篇终。虽未为司南，然亦一时独步②。"足可证明魏晋期间之重差术已成定形。

南宋秦九韶继刘徽之后，编撰测望九问列于《数书九章》，就中句股测望术、重差术及以正负开方术解答者各三问。清李锐称："此卷(四库馆本卷四)本其法(测望术)而扩充之，于古人之意实多所发明③。"可见，秦氏不仅广泛应用句股形，也沟通测望术与代数之间关系，从而加强高次方程研究。

清朝，研讨宋、元学术之风极为盛行。李锐于顾广圻处得钞本《数书九章》，发现讹文夺字较多，计算错误也复不少，在校勘中，曾付出巨大劳动，就所见疑误处，去伪存真，一一校正。李锐自称："其讹舛之处，较他卷尤甚，今悉为正之；至术有未合者，更设法以附其后焉④"。

---

* 本文系转载自《宋元数学史论文集》，(1966)。今略有修改。

① 《九章算术》刘徽序。

② 王孝通：《上缉古算术表》。

③ 王萱龄临李锐校《数学九章》钞本。

④ 王萱龄临李锐校《数学九章》钞本。

罗士琳对李氏校本曾略加核算，并稍事评论。

沈钦裴于张敦仁处得另一钞本，"订讹补脱，历有年所①"。因其年老病瘤，校勘未尽。于测望九问中，只三数条款耳。

沈氏弟子宋景昌，参考各家校本，明辨是非，存善去芜，逐条驳正；使《数书九章》文从字顺，易于了解。对于测望九问，既从李、沈两家之说，再加核算。所有这些对后世读者，都有不少裨益。

李、沈、宋氏虽校订多次，然旧误相仍，注释未谛之处犹未能免；与数理相关者，也有舛漏，至于测望九问造术原意，更未深入分析。今不揣冒昧，以个人管见，逐一解释，借以探讨秦氏立术之源。

第1问 望山高远

"问名山去城不知高远。城外平地有木一株，高二丈三尺(h)，假为前表，乃立后表与木齐高。相去一百六十四步(d)。先退前表三丈九寸(b)，次退后表三丈一尺三寸(a)，斜望山峰，各与其表之端参合。人目高五尺(k)。里法三百六十步，步法五尺。欲知山高(x)及远(y)各几何。"(图1)

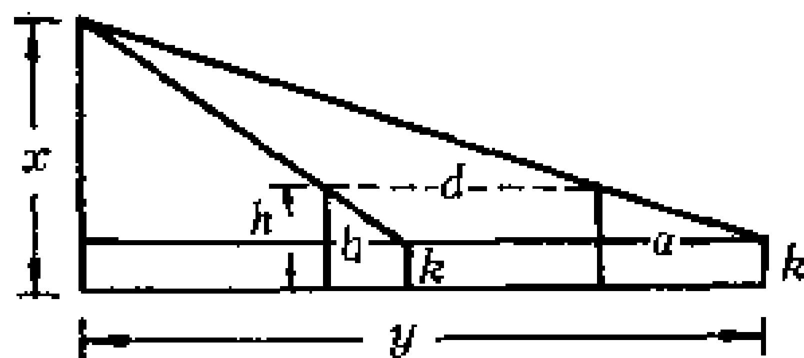


图 1

按术计算，得：

$$x=\frac{(h-k)(d+a-b)}{a-b}=20\text{ 里 }183\frac{3}{5}\text{步},$$

$$y=\frac{a(h-k)(d+a-b)}{h(a-b)}=27\text{ 里 }328\frac{67}{575}\text{步}。$$

李锐说："此所得，系人目上之山高。若加人目高，则多一

① 宋景昌《数书九章札记》宜稼堂丛书本。

步[①]"。又说："远数误，后人目距山，系三十五里二百三十九步一尺三寸[②]"。并指出求y之术为$y=\frac{a(d+a-b)}{a-b}$。所见正确。沈钦裴也改正求远术、草，不误。

此问与《海岛算经》第1问相类，该问系"人目著地"，此乃"人目高五尺"。秦氏误以人目上之山高$(x-k)$为山高(x)，由相似句股形得：

$$ax=(h-k)y,\ bx=(h-k)[y-(d+a-b)],$$

消y元，有$x=\frac{(h-k)(d+a-b)}{a-b}$。又按术文"以法乘表高为远法，以退后表乘高实为远实。实如法而一，得山去"。秦氏可能误以$h-k$、$x-k$分别为h、x，由相似句股形误得：$\frac{y}{x}=\frac{a}{h}$，即$y=\frac{a}{h}x=\frac{a(h-k)(d+a-b)}{h(a-b)}$。

第2问 临台测水

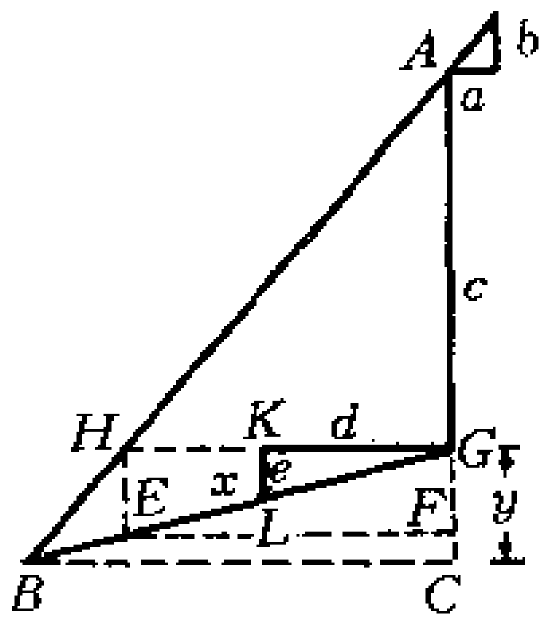


图 2

"问临水城台，立高三丈(c)，其上架楼。其下址侧脚阔二尺。护下排沙下桩。去址一丈二尺(d)。外桩露土高五尺(e)，与址下平。遇水涨时，浸至址。今水退不知多少，人从楼上栏杆腰串间，虚驾一竿出外。斜望水际，得四尺一寸五分(a)，乃与竿端参合。人目高五尺(b)。欲知水退立深(y)，涸岸斜长(x)自台址至水际各几何"。(图2)

按术文计算，乃有：

$$x^2=\frac{c^2(acd)^2[(acd)^2+(ace)^2]}{[(acd)(bcd)-(acd)(ace)]^2},$$

---

① 王萱龄临李锐校《数学九章》抄本。

② 同上。

$$y^2=\frac{e^2c^2(acd)^2[(acd)^2+(ace)^2]}{(d^2+e^2)[(acd)(bcd)-(acd)(ace)]^2}。$$

开方得：$x=41\frac{37}{157}$尺，

$y=15\frac{135}{157}$尺。

如术计算，结果正确。应该指出，这种算法十分繁杂，宋景昌说："凡算之道，省约为善，似此繁难，徒乱人意耳①"。所见极是。秦书只言其术，不详其理。他究竟如何立术，何以进行如此繁难运算，读者疑之。

李锐说："此条术虽甚繁，理数皆极精密。非兼通于句股通分之法者，不能立也。但累乘累除，错综变换，皆未尝明言其故。观者不能无金鍼不度之疑②"。他便"绘图以解之，并条析其乘、除各数"。以相似三角形对应边成比例推求水退立深及涸岸斜长。宋景昌及顾观光③皆从李锐之说，也以相似三角形解之。这种解法，固然十分简便，可惜不合秦氏原术。

秦氏可能由相似句股形导出$EF=GH=\frac{ac}{b}$，$FG=EH=\frac{ace}{bd}$，便得

$EG=\sqrt{\left(\frac{ac}{b}\right)^2+\left(\frac{ace}{bd}\right)^2}$。又由$\triangle GBC\sim\triangle GEF$得：

$$GC:GB=GF:GE,$$

即

$$y:x=\frac{ace}{bd}:\sqrt{\left(\frac{ac}{b}\right)^2+\left(\frac{ace}{bd}\right)^2},$$

或

$$y=\frac{ace\cdot dx}{d\sqrt{(acd)^2+(ace)^2}}。\qquad (1)$$

① 宋景昌《数书九章札记》宜稼堂丛书本。

② 王萱龄临李锐校《数学九章》钞本。

③ 顾观光《九数存古》。

由$\triangle ABC \sim \triangle AHG$，得$BC:AC=HG:AG$，

即
$$bc\sqrt{x^2-y^2}=ac(y+c)。 \qquad (2)$$

由(1)、(2)得：

$$[(acd)(bcd)-(acd)(ace)]x=c(acd)\sqrt{(acd)^2+(ace)^2}。$$

为了避免根式运算，平方得：

$$x^2=\frac{c^2(acd)^2[(acd)^2+(ace)^2]}{[(acd)(bcd)-(acd)(ace)]^2}。 \qquad (3)$$

又由$\triangle GBC \sim \triangle GLK$得$y=\frac{e}{\sqrt{d^2+e^2}}x$，平方乃有：

$$y^2=\frac{e^2}{d^2+e^2}x^2=\frac{e^2\cdot c^2(acd)^2[(acd)^2+(ace)^2]}{(d^2+e^2)[(acd)(bcd)-(acd)(ace)]^2}。 \qquad (4)$$

所得(3)、(4)式与术、草相合。①

李锐又说："此题本意谓竿端与台址上下悬直，则'侧脚阔二尺'句已赘。又不明言人目距台边近远，皆踳駮也②"。评论正确，本题文中，既有漏洞，又有赘言。

---

① 比利时数学史家李倍始(U. Libbrecht)摘译本文列于其著《十三世纪的中国数学(Chinese Mathematics in the Thirteenth Century)》(1973)之中，于第二问下称："秦氏此法，极其繁杂。今校以简单形式：

因 $\frac{y}{BC}=\frac{e}{d}$， $d\cdot y=e\cdot BC$；

$\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$， $b\cdot BC=a\cdot AC$；

或 $bdy=ae\cdot AC$，

又 $AC=y+c$，

$bdy=ae(y+c)$， $(bd-ae)y=aec$，

得 $$y=\frac{aec}{bd-ae}. \qquad (1')$$

又 $\frac{x}{y}=\frac{GL}{e}$，

则有 $$x=\frac{GL}{e}\cdot y=\frac{GL}{e}\cdot\frac{aec}{bd-ae}. \qquad (2')$$

第3问　陡岸测水

"问行师遇水，须计篾缆，搭造浮桥。今垂绳量陡岸，高三丈，人立其上(b)，欲测水面之阔(x)。以六尺($c+d$)竿为矩，平持去目下五寸(a)。今矩本抵颐，遥望水彼岸，与矩端参相合。又望水此岸沙际(y)，入矩端三尺四寸(d)。人目高五尺。其水面阔几何"。(图 3)

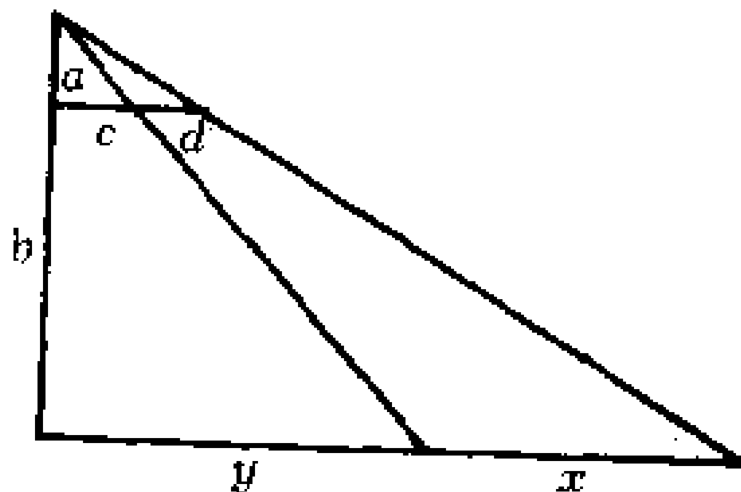


图　3

由相似句股形得：

$$a(x+y)=(c+d)b,\quad ay=cb.$$

因　　$GL=\sqrt{d^2+e^2}$，　于是 $x=\dfrac{ac\sqrt{d^2+e^2}}{bd-ae}$。

上述(3)、(4)式可变形为

$$x=\frac{c(acd)\sqrt{(acd)^2+(ace)^2}}{(acd)(bcd)-(acd)(ace)}$$

$$=\frac{\sqrt{(ac)^2(d^2+e^2)}}{bd-ae}$$

$$=\frac{ac\sqrt{d^2+e^2}}{bd-ae},\qquad (2')$$

$$y=\frac{eac}{bd-ae}\qquad (1')"$$

李倍始又称："按逻辑而论，x^2及y^2两式将给以错误印象。

一如上述复原步骤，此问只用相似句股形及毕达哥拉(Pythagoras)定理求得解答。

(3)、(4)式中辅助量并非代人而得，但复原中，显系代入者。

秦氏未必有一般解法，因此，难以归结为简单程序。重要因素，乃其缺乏数理逻辑之思想。"

秦氏原术，虽属繁杂，全然正确无误。李倍始之(1′)、(2′)两式，数值虽合，而其运算程序则与术文、草文俱不符合。这种校算，固然简捷，若就秦氏遗术而论，似无必要。

按术文、草文揣测，秦氏先求得x^2之后，再求y^2之值，似非代人。

李倍始之论，值得商榷。

② 王萱龄临李锐校《数学九章》钞本。

两式相减，乃得：

$$x=\frac{bd}{a}=238\text{尺}.$$

如术计算，得 $x=\frac{(b-a)d}{a}=234.6$尺，较正确值少3.4尺。李锐说："按测望诸线皆合于人目之一点，其高正当自人目计之。今减去人目至矩，自矩计之，不得其理矣①。依术文"以句股重差求之"揣测，秦氏似是由相似句股形误置对应边求得水面之阔。也即误以六尺竿之高 $(b-a)$ 为人目至水面之高 (b)，求得水面阔。

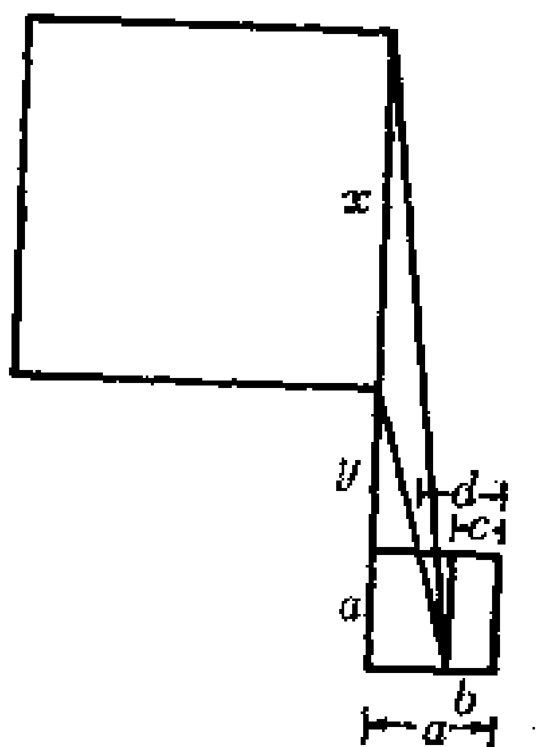


图 4

第4问　表望方城

"问敌城不知广远，傍城南山原林间望之，林际有木二株，南北相去一百六十步 (a)，遥与城东方面参相直。于二木之东相对立表，表间与木四平方。人目以绳维之，人自东后表，向西行一十步 (b)，望城东北隅。人东前表一十五步 (c)。又望城东南隅，人东前表四十八步强半步 (d)。里法三百六十步。欲知其方广 (x) 及相去 (y) 几何"。（图 4）

秦氏误置相似句股形对应边，即误以 x、$(c-b)$ 分别为 $(x+y)$、$(d-b)$，导出错误答案：

$$x=\frac{a(a-c)}{c-b}=12\text{里}320\text{步},$$

$$y=\frac{a(a-d)}{c-b}=9\text{里}320\text{步}.$$

李锐曾说："答数皆误②"。并指出所求城广数（$x=12$里320

① 王萱龄临李锐校《数学九章》钞本。
② 同上。

步）“乃城东北隅至前木之远$(x+y)$，以为城广数(x)误”①。

李锐未详其法，宋景昌补术为：

$$y=\frac{a(a-d)}{(d-b)}=1\text{ 里 }99\frac{11}{31}\text{步},$$

$$x=\frac{a(a-c)(d-b)-a(a-d)(c-b)}{(c-b)(d-b)}$$

$$=11\text{ 里 }220\frac{20}{31}\text{步}.$$

答数正确。宋氏显系由相似句股形，按对应边之比例式求得答数者。

3、4两问术文俱有“以句股重差求之”一语，其中“句股重差”术可能是由两组相似句股形导出对应边之比例式后，相减即得所求数据者。与所谓重差术稍有不同。由秦书术、草不难看出，对应边之概念秦氏并不熟悉，以致误置对应边使答数皆误。

第5问 遥度圆城

“问有圆城周径，四门中开。北外三里(a)有乔木，出南门便折东行九里(b)，乃见木。欲知城周、径(x^2)各几何。圆用古法$(\pi=3)$”。(图5)

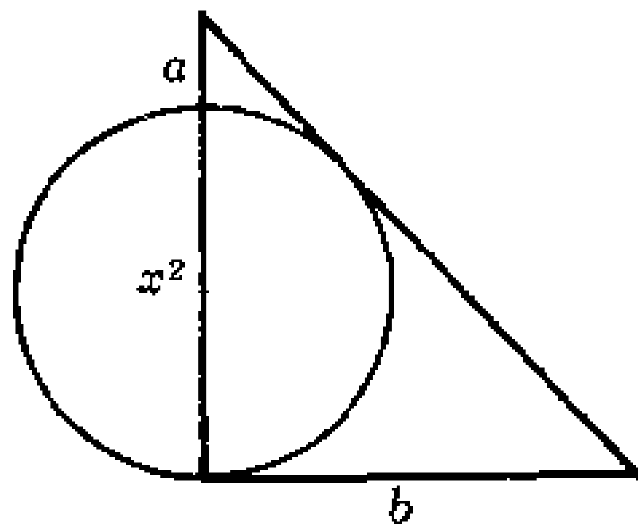


图 5

术文只说“以句股夕桀求之②”，便以“开玲珑九乘方”求城径。玲珑九乘方乃不含奇次项之十次方程。即：

---

① 王萱龄临李锐校《数学九章》钞本。

② 四库馆本《数学九章》及王萱龄所临李锐校本《数学九章》之钞本中，此问之术文皆是“以句股夕桀求之”。宜稼堂丛书本、丛书集成本及国学基本丛书本《数书九章》皆为“以句股差率求之”。但是，在赵琦美钞本《数书九章》中，则是“以句股夕桀求之”，于“夕桀”两字之旁注“差率”二字。今从赵琦美钞本原文。

$$x^{10}+5ax^8+8a^2x^6-4a(b^2-a^2)x^4-16a^2b^2x^2-16a^3b^2=0 \qquad (1)$$

或

$$x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11664x^2-34992=0 \qquad (2)$$

秦氏求得一根为$x=3$，以$x^2=9$里为城径。若以y为城径，也需解一五次方程。即：

$$y^5+15y^4+72y^3-864y^2-11664y-34992=0。$$

李锐说："元、李冶《测圆海镜》一百七十问，仅一题取至五乘方(即六次方程)，犹自以为烦。此题非甚难者，乃取至九乘方，盖未得其要也。……，爰另立取法①"。即（图6）：

图 6

设x为城径，由

$$\triangle ABC \sim \triangle ADO$$

得：

$$AC:AB=AO:AD,$$

即：

$$\sqrt{(x+a)^2+b^2}:(x+a)=\left(\frac{x}{2}+a\right):\sqrt{a(x+a)},$$

或

$$x^4+2ax^3+a^2x^2-4ab^2x-4a^2b^2=0,$$

求得城径为$x=9$。

李锐以四次方程求解，虽比原方程次数低，若两端除以$x+a$（$-a$不是根），则得更低一次之三次方程：

---

① 王萱龄临李锐校《数学九章》钞本。

$$x^3+ax^2-4ab^2=0.$$

但是，这种解法，并非秦氏原术。

沈钦裴认为，以x^2表示城径，将下式

$$x^4(x^2+a)=4ab^2 \qquad (3)$$

乘以$(x^2+2a)^2$即得$(x^2+2a)^2[x^4(x^2+a)-4ab^2]=0$，展开乃与秦书吻合。

沈氏为了凑合(1)或(2)式，便于(3)式乘一因式$(x^2+2a)^2$。若(3)式乘以他一因式，则不能得到(1)或(2)式。据此，程延熙先生说："殊不足阐明秦氏立术的理由。"且秦氏推得(1)或(2)式未必无因。

沈氏又称："此术精深，须以天元一显之①"。李锐谓："细校术、草中，廉、隅、积、实之数与立天元一法自然相生者，迥殊。……，尤于古人立法之意不合②"。钱宝琮先生说："我们认为《数书九章》的所有高次方程，决不是由天元术推导出来的③"。

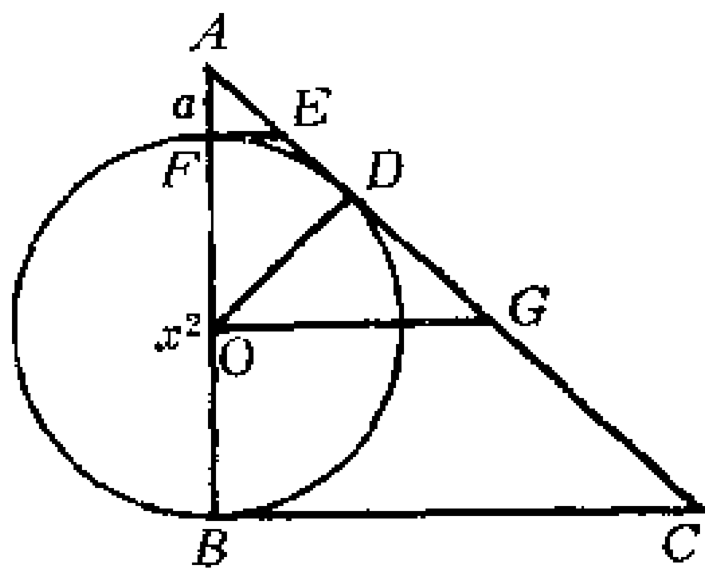


图 7

宋景昌以为："先生(指其师沈钦裴)此术，本之《测圆海镜》边股及底句第四问，即识别杂记所谓边股(FE)重股(BC)相乘得半径幂。底句(FE)明句(BC)相乘得半径幂也④"。很有见地，但是(3)式乘以$(x^2+2a)^2$得到玲珑九乘方之原因，并未分析。

宋氏又称："若欲相消便得九乘方者，以城径乘倍北外里并

① 宋景昌《数书九章札记》宜稼堂丛书本。
② 王萱龄临李锐校《数学九章》钞本。
③ 见《宋元数学史论文集》内钱宝琮《秦九韶数书九章研究》一文。
④ 见①。

城径($x^2\cdot(x^2+2a)$)为径率。以东行里乘倍北外里并城径($b\cdot(x^2+2a)$)为句率。如积求之，即得①"。依宋氏之说，似是由$\triangle ADO\sim\triangle AOG$(图 7)得$AO:OG=AD:OD$，
即"径率"：

$$x^2(x^2+2a)$$
$$=4\sqrt{a(x^2+a)}\cdot OG. \tag{4}$$

又由$\triangle AOG\sim\triangle ABC$得：$AO:OG=AB:BC$，即"句率"：

$$b(x^2+2a)=2(x^2+a)\cdot OG。 \tag{5}$$

由(4)、(5)消去OG，得

$$\frac{x^2(x^2+2a)}{4\sqrt{a(x^2+a)}}=\frac{b(x^2+2a)}{2(x^2+a)}.$$

两端平方，得

$$\frac{x^4(x^2+2a)^2}{16a(x^2+a)}=\frac{b^2(x^2+2a)^2}{4(x^2+a)^2} \tag{6}$$

约去公分母$4(x^2+a)$，展开即得(1)或(2)式。

秦氏不以x为城径，不惮麻烦以x^2表示城径，或想造一高次方程记录，若(6)式不约公分母，则得一更高之十二次方程。且只约分母不约分子，令人费解。可见宋氏之说，与秦氏原术略有差异。

我以为，由$\triangle AOG\sim\triangle AFE$(图 7)得$AO:OG=AF:FE$，即

$$\frac{ab}{x^2+a}(x^2+2a)=2a\cdot OG \tag{7}$$

根据"底句明句相乘得半径幂"，使(5)、(7)乘积与(4)式一半之平方相减，得：

$$[b(x^2+2a)]\cdot\left[\frac{ab}{x^2+a}(x^2+2a)\right]-\left[\frac{x^2(x^2+2a)}{2}\right]^2=0$$

① 宋景昌《数书九章札记》宜稼堂丛书本。

展开，即 $x^{10}+5ax^8+8ax^6-4a(b^2-a^2)x^4-16a^2b^2x^2-16a^3b^2=0$。与秦书术、草俱相符合。

第6问　望敌圆营

"问敌临河为圆营，不知大小。自河南岸至某地，七里(a)，于其地立两表，相去二步(b)。其西表与敌营南北相直，人退西表一十二步(c)，遥望东表，适与敌营圆边参合，圆法用密率(此处系指 $\pi=\frac{22}{7}$)，里法三百六十步。欲知其营周及径(x)各几何"。(图8)

以x表示圆径，按术计算得："三乘玲珑方"，即

$$-\left[\frac{(c^2-b^2)}{4}\right]^2x^4+\left[a^2b^2\cdot\frac{(b^2+c^2)}{2}\right]x^2-(a^2b^2)^2=0,\quad (1)$$

或

$$-x^4+\frac{8a^2b^2(b^2+c^2)}{(c^2-b^2)^2}x^2-\frac{16(a^2b^2)^2}{(c^2-b^2)^2}=0,\quad (2)$$

或

$$-x^4+1534464x^2-526727577600=0。\quad (3)$$

答数$x=2$里$=720$步，合于方程，但不是此问的解。宋景昌说："此术开方廉(x^2项系数)、隅(x^4项系数)误，故答数不合。然立术已误，虽开方不误，仍不合也①"。

此问并不需要四次方程，以一次方程解之即得。若限用有理系数，则需二次方程。李锐谓："按此题用平方可矣。……，开三乘方，徒为繁冗耳②"。批评正确。宋氏由$\triangle ABC\sim\triangle AB'C'$(图8)得

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AC'}{B'C'},$$

---

① 宋景昌《数书九章札记》宜稼堂丛书本。

② 王萱龄临李锐校《数学九章》钞本。

图 8　　　　图 9

即
$$\frac{\sqrt{(a+c)(a+c-x)}}{\frac{x}{2}}=\frac{c}{b},$$

平方：
$$x^2+\frac{4b^2(a+c)}{c^2}x-\frac{4b^2(a+c)^2}{c^2}=0\ .$$

解之，$x=714\frac{5004}{5131}$步。但是，秦氏何以得一四次方程？宋氏以为："原术以西表至河(a)为大句弦和(即误以为$AB+BC=a$)，是和内少一小股(其中少加小股c)矣①"。秦氏不止误以a为$a+c$，还误以为$AB'=c$，今按术揣测如下：

因 $\triangle ADE\sim\triangle AC'B'$(图9)，故$DE=\frac{ab}{\sqrt{c^2-b^2}}$，

于是
$$AE=\sqrt{a^2+\left(\frac{ab}{\sqrt{c^2-b^2}}\right)^2}\ .$$

又因$\triangle ADE\sim\triangle ACB$，故$BC^2\cdot AE^2=DE^2\cdot AB^2$，

① 宋景昌《数书九章札记》宜稼堂丛书本。

即

$$\frac{x^2}{4}\left[a^2+\frac{a^2b^2}{c^2-b^2}\right]=\frac{a^2b^2}{c^2-b^2}\cdot\left(a-\frac{x}{2}\right)^2$$

整理得：$\frac{c^2-b^2}{4}\cdot x^2-a^2b^2=-ab^2x$

平方得 $-\left[\frac{(c^2-b^2)}{4}\right]^2x^4+\left[a^2b^2\cdot\frac{(b^2+c^2)}{2}\right]x^2-(a^2b^2)^2=0$。

与秦术相合。

第7问 望敌远近

“问敌军处北山下，原不知相去远近。乃于平地立一表，高四尺(a)。人退表九百步(b)，步法五尺，遥望山原，适与表端参合。人目高四尺八寸(c)。欲知敌军相去几何(x)”。(图10)

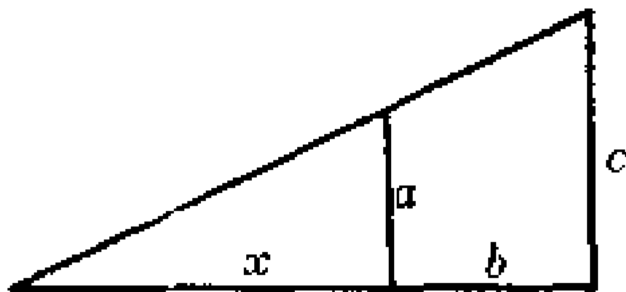


图 10

由相似句股形得：$\frac{x}{a}=\frac{x+b}{c}$，解之得：$x=\frac{ab}{c-a}=12.5$里，与秦术相合。但术文有“以句股求之，重差入之”一语，顾观光以为：“此借高以测远，非重差也。句误①”。

第8问 古池推元

“问有方中圆古池，堙圮止余一角。从外方隅，斜至内圆边，七尺六寸(a)。欲就古迹修之。欲求圆、方(x)、方斜(y)各几何。”(图11)

以x表示圆径，y表示对角线。由句股定理得：

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{2}+a\right)^2,$$

① 顾观光《九数存古》。

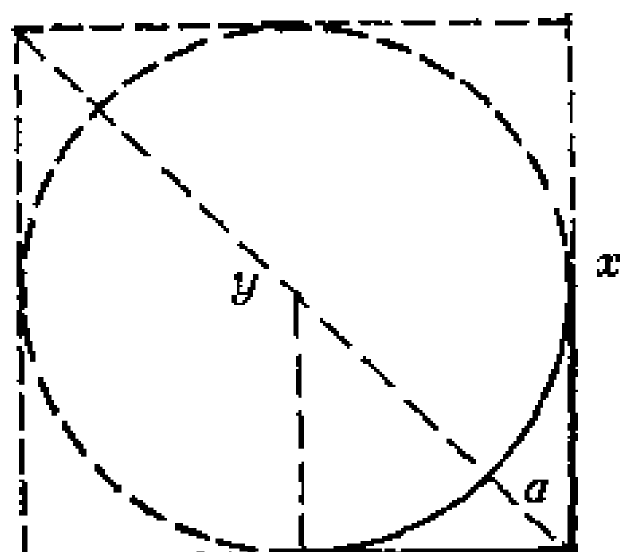


图 11

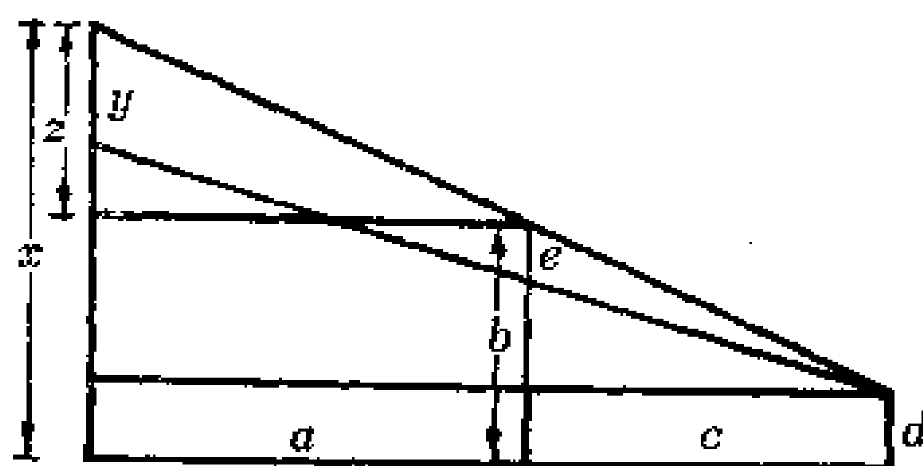


图 12

即

$$\frac{1}{2}x^2-2ax-2a^2=0。$$

解之，得$x=2a(1+\sqrt{2})$，故有$y=x+2a=2a(2+\sqrt{2})$。上列各式与秦氏术文相合。

第9问 表望浮图

“问有浮图欹侧，欲换塔心木。不知其高，去塔六丈(q)有刹竿，亦不知其高，竿木去地九尺二寸始钉镯，镯一十四枚，枚长五寸，每镯下股相去二尺五寸(k)。就竿为表，人退竿三丈(c)。遥望浮图尖，适与竿端斜合，又望相轮之本，其景入镯第七枚(h)上股，人目去地四尺八寸(d)，心木放三尺为榰两翦截。欲求塔高(x)、轮高(y)、合用塔心木长各几何”。(图12)

按术文得：表高：$b=4$丈2尺2寸，塔高$x=z+b=11$丈7尺，不误。所求塔高，计算正确，叙述明白，无须赘辞。但，轮高$y=\frac{a(h-1)\cdot k}{c}=\frac{ae}{c}=3$丈误。以致塔身高、塔心木长皆误。李锐说：“相轮高数，少一小股较一丈五尺也。塔身高、塔心木长，皆本此数加减而得，故误数相等①”。

---

① 王萱龄临李锐校《数学九章》钞本

宋景昌以相似三角形注解，恐非秦氏原意。

今按相似句股形对应边成比例推导，乃得：

$\frac{z}{a}=\frac{b-d}{c}$，即 $z=\frac{a(b-d)}{c}$，于是 $x=z+b=11$ 丈 7 尺，

与秦氏术、草相合。又由相似句股形得：

$$c(x-d)=(a+c)(b-d),$$

$$c[(x-d)-y]=(a+c)[(b-d)-e]。$$

消元得：

$$y=\frac{(a+c)e}{c}=4\text{ 丈 }5\text{ 尺。}$$

于是塔身高为：$x-y=7$ 丈 2 尺，塔心木长为：$x-y+3$ 尺 $=7$ 丈 5 尺。

就所求相轮高 $y=\frac{(a+c)e}{c}$ 与原术 $y=\frac{ae}{c}$ 对比，易知秦氏误以 a 为 $(a+c)$，以致三数俱误。

秦九韶测望造术思想之探讨

李 培 业

(一)

吴文俊先生在"《海岛算经》古证探原"[1]一文中提出古证复原的三项原则，可为研究古算的指针。特别是"证明应符合当时与本地区数学发展的实际情况，而不能套用现代的或其他地区的数学成果与方法"。应是必须遵守的一条原则。只有这样，才能探讨出我国古代数学家的深邃思想，才能阐明我国古代数学不同于西方数学的特色。这也是历史唯物主义的基本态度。

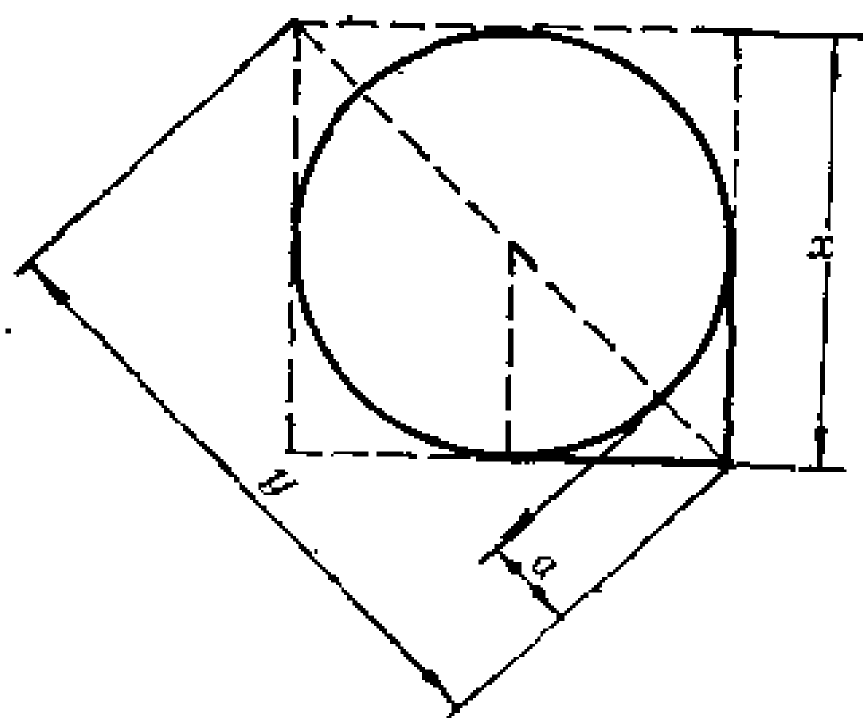


图 1

对秦九韶的测望术，虽有清李锐(1773—1817)、罗士琳(1774—1853)、沈钦裴、宋景昌诸人及现代中算史专家进行探讨，但似乎尚未完全符合秦九韶思想。比如第八问"古池推圆"题：[2]

"问有方中圆古池，堙圮止余一角。从外方隅，斜至内圆边，七尺六寸(a)。欲就古迹修之，欲求圆、方(x)、方斜(y)各几何。"(图 1)

一般的解法是：[3]以x表示圆径，y表示对角线，由句股定理得：

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{2}+a\right)^2 \quad (1)$$

即

$$\frac{1}{2}x^2-2ax-2a^2=0 \quad (2)$$

(2)式虽为秦氏原术，但从(1)到(2)，何以一定要保留x^2的系数为$\frac{1}{2}$，而不把它化为1？由此看出，很明显地"出现了不合情理的人为雕琢痕迹"。[1]

秦氏在建立其术时，大都指出了其所用主要知识在《九章算术》某章内的范围，并指出了在解题中所用的主要方法。前者常用"以××求之"，后者常用"以××入之"来表达。对于此题，秦氏术曰："以少广求之，投胎术入之，……"。而不是"以句股求之"。可见，秦氏并未用句股定理。我们联系到当时数学发展的实际情况，联系到《益古演段》中类似问题的解法，则很自然地推知秦氏是用下面的演段法解的。

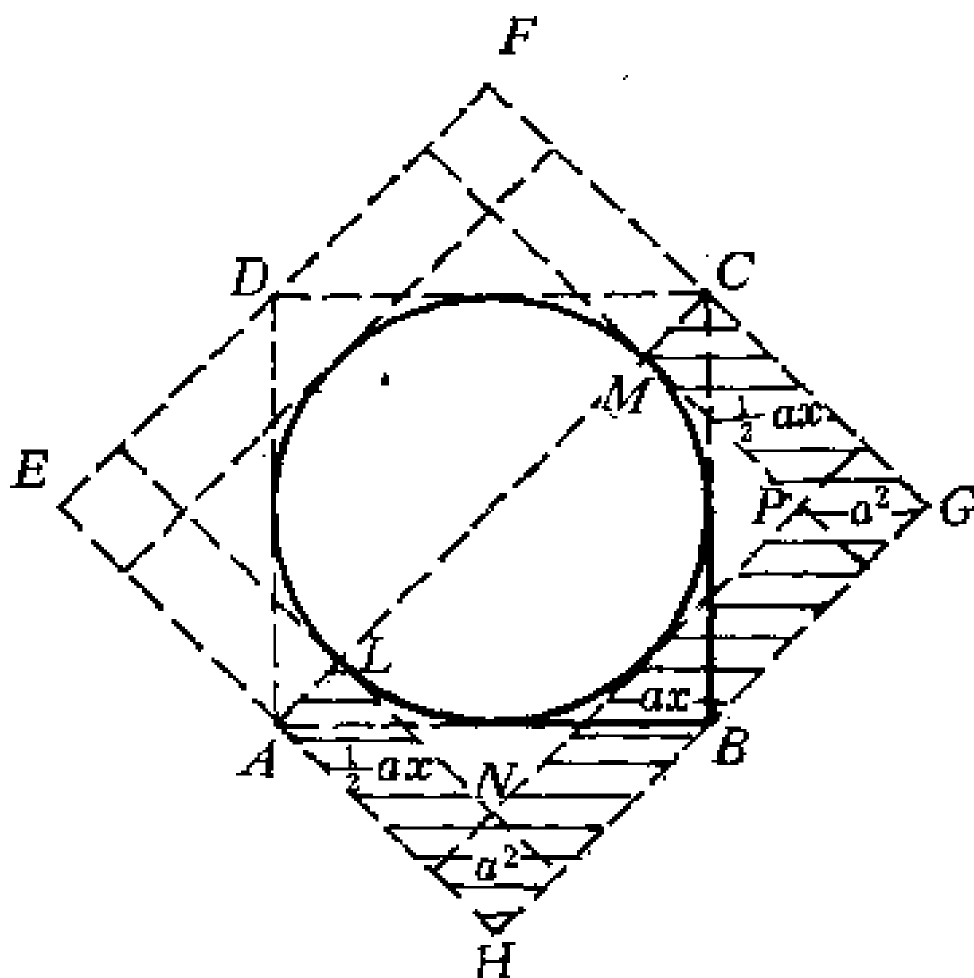


图 2

如图，（图2）作正方形□ABCD的外接正方形□EFGH。

$$\because \square ACGH=\frac{1}{2}AC^2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2x^2$$
$$=x^2,$$

而$\square LMPN=\frac{1}{2}x^2$，故阴影部分面积是：

$$\square ACGH-\square LMPN$$

$=x^2-\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^2$，它又等于$2ax+2a^2$，故得方程：

$$\frac{1}{2}x^2=2ax+2a^2,$$

即 $$\frac{1}{2}x^2-2ax-2a^2=0。$$

上面解法，系利用图形的"出入相补，各从其类"，找出数量之间的关系，列出方程，这就是宋代盛行一时的"演段术"。

（二）

秦九韶的测望九题中，有六题是属于"重差术"的[2]。刘徽的"重差术"是以"重差为率"的句股比例线段立论的[4, 5]。但刘徽的证明到宋代已经失传。杨辉说："海岛题法隐奥，莫得其秘，李淳风虽注，祇云下法，亦不曾说其源"[6]。"迄今千余载间，……未闻解白作法之旨者"[7]。可见，唐代以后，就早已无人了解刘徽立法的根据了。所以宋代的测量术，虽继承了刘徽测量的方法，但未继承其立论的根据，而是另有一条途径。那就是继承了赵爽的"日高术"的证明方法，它是基于出入相补原理之上的一条基本定理[1]。这条基本定理，刘徽尚未提到，赵爽曾用到，杨辉阐述得最为明确。他说："直田（$\square ABCD$）之长（AB）名股，其阔（BC）名句，于两隅角斜界一线（AC），其名弦。弦之

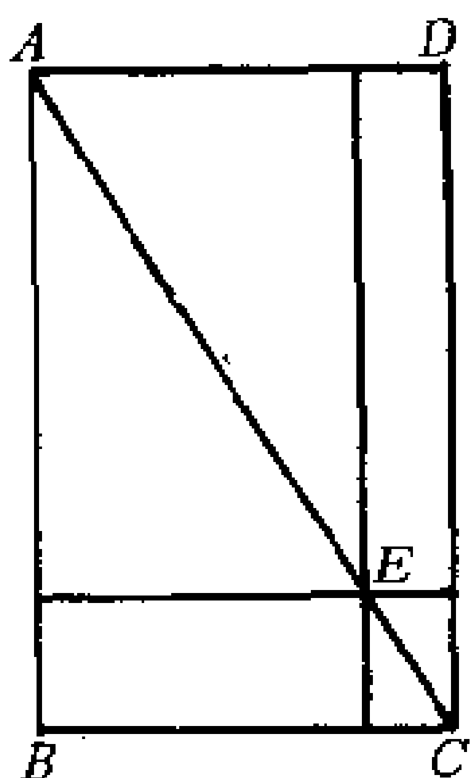


图 3

内外分二句股(△*ABC*及△*ACD*)，其一句中容横(□*BE*)，其一股中容直(□*ED*)，二积之数皆同(□*BE*=□*ED*)”[7]。(图 3)

杨辉以此定理证明了《九章算术》句股章的所有测量题，并用它证明了海岛公式[8]。他是利用图 3 中的那样两个图叠在一起而证明海岛公式的(图 4)。杨辉说：“前表(*DC*)是第一图以表望木，后表(*EF*)是第二图以表望木。……古人以二图沓用，设海岛为题，以重差为术。前表去木远，乃小股(*BP*)中容积一段(□*BD*)；后表去木远，乃大股(*BG*)中容积一段(□*BF*)。以小容积减大容积(□*BF*－□*BD*)，其余减不尽者，正在前后表两界之中，名表间积(□*CF*)。所以古人以表高乘表间为实(*CD*×*CE*)，以前图小余股(*CP*)减后图大余股(*EG*)，以余(*EG*－*CP*)除表间积(*CD*×*CE*)得弦外之高(*AN*)。本是大容积减小容积，余为实，小余股减大余股，余为法，以法除实，求弦界外之高$\left(AN=\frac{\square BF-\square BD}{EG-CP}\right)$”[7]。

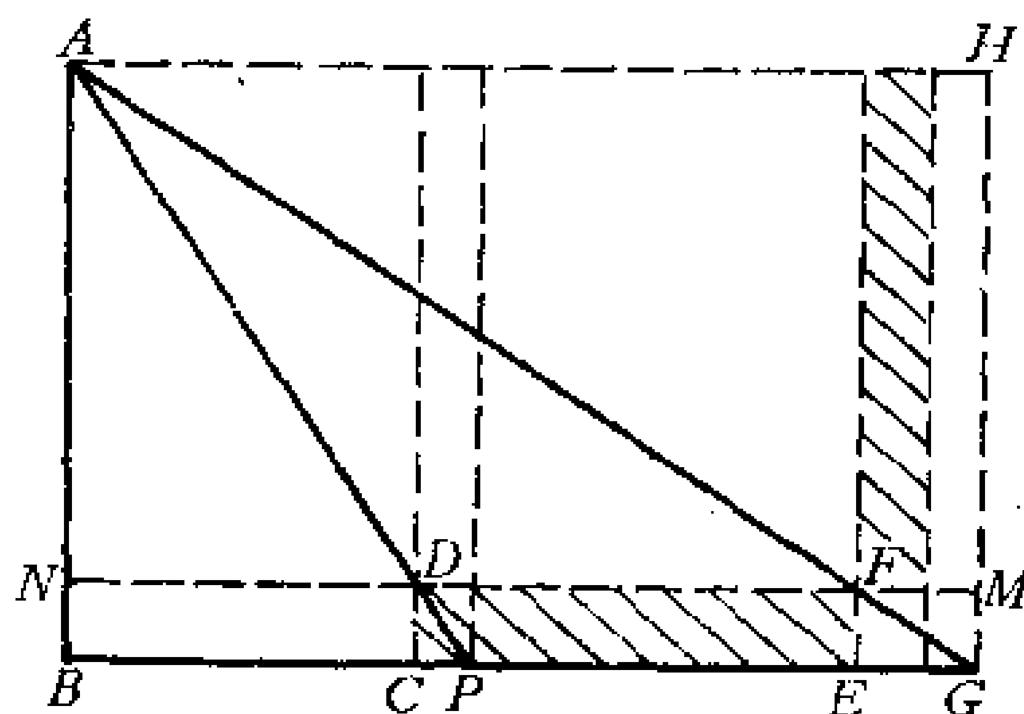


图 4

从这段叙述我们可以看出，杨辉对“重差”的理解与刘徽不同。刘徽的“重差”是“表间距”(两表至岛的距离之差)与“影差”(人目至表的距离之差)，而杨辉所理解的“重差”是：第一个差

为“大容积减小容积”($\square BF-\square BD$，即“表间积”)；第二个差是“小余股减大余股”($EG-PC$即“影差”)。刘徽是以“重差为率”，而杨辉是以“重差”为法实，两者是不一样的。杨辉说：“姑以一问(指海岛第一问)，其余好学君子自能触类而考，何必轻传”[7]。可见，杨辉是把他的这种“重差”思想贯之于海岛九题的。

秦九韶是与杨辉同时代而稍早的人，且皆为南方数学家，故所处的时代背景是一样的，学术之间应有较多的贯连。此时，数学的特点是演段术极为盛行，从杨辉的著作，流传至今的《益古演段》，以及杨辉介绍的刘益《议古根源》中可见一斑。所以秦九韶的测量术与杨辉的立术思想很可能是一致的，他对“重差”的理解与杨辉更有相似之处。基于这种想法，我对秦氏测量题中其余八问(第八问已探讨如上)，皆利用上述基本定理证明。凡有“以句股重差求之”的，均本着杨辉思想推导。想依据吴文俊先生提出的原则，补出古证，以作为探讨秦氏思想之一助(图示均依文〔9〕绘制)。

(三)

第一问　望山高远

“问名山去城不知高远。城外平地有木一株，高二丈三尺(h)，假为前表。乃立后表与木齐高。相去一百六十四步(d)。先退前表三丈九寸(b)，次退后表三丈一尺三寸(a)，斜望山峰，各与其表之端参合。人目高五尺(k)，里法三百六十步，步法五尺，欲知山高(x)及远(y)各几何。”(图5)

依术意：

$$x=\frac{(h-k)(d+a-b)}{a-b},$$

$$y=\frac{a(h-k)(d+a-b)}{h(a-b)}.$$

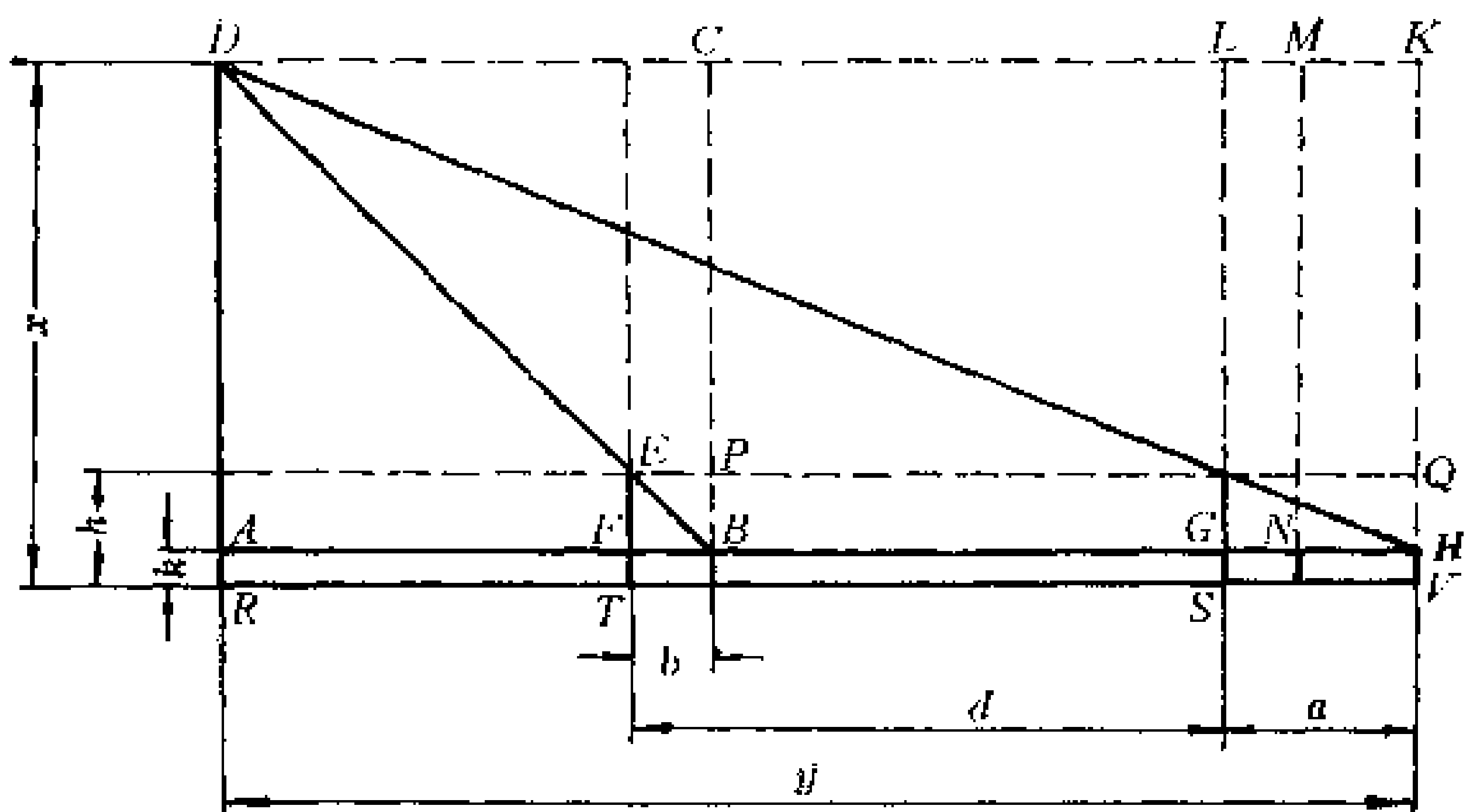


图 5

$\because \quad \square AQ=\square GK, \qquad \square AP=\square FC,$

$\therefore \quad \square AQ-\square AP=\square GK-\square FC,$

即 $\square BQ=\square NK,$

得 $$(h-k)(d+a-b)=(x-k)(a-b)$$

即 $$x=\frac{(h-k)(d+a-b)}{a-b}+k$$

与原术比较，少一目高k。刘徽术先求出表外山高，此则加了$(h-k)$一段，与刘徽各异。因而秦氏误以为算及目高，以致发生错误。

本来由 $\square AQ=\square GK$

得 $$y(h-k)=a(x-k),$$

即 $$y=\frac{a(x-k)}{h-k}$$

$$=\frac{a(d+a-b)}{a-b}。$$

但秦氏以$\square RQ$代替$\square AQ$，以$\square SK$代替$\square GK$，于是，得出错误的结果：

$$y\cdot h=a\cdot x$$

即 $$y=\frac{ax}{h}=\frac{a(h-k)(d+a-b)}{h(a-b)}$$

由于k值很小，□RH、□SH面积随之亦很小，秦氏在证明中，忽略小部分面积而造成错误，是可以理解的。

第二问　临台测水

"问临水城台，立高三丈(c)，其上架楼。其下址侧脚阔二尺。护下排沙下桩。去址一丈二尺(d)，外桩露土高五尺(e)，与址下平。遇水涨时，浸至址。今水退不知多少，人从楼上栏杆腰串间，虚驾一竿出外。斜望水际，得四尺一寸五分(a)，乃与竿端参合。人目高五尺(b)。欲知水退立深($GC=y$)，涸岸斜长($BG=$

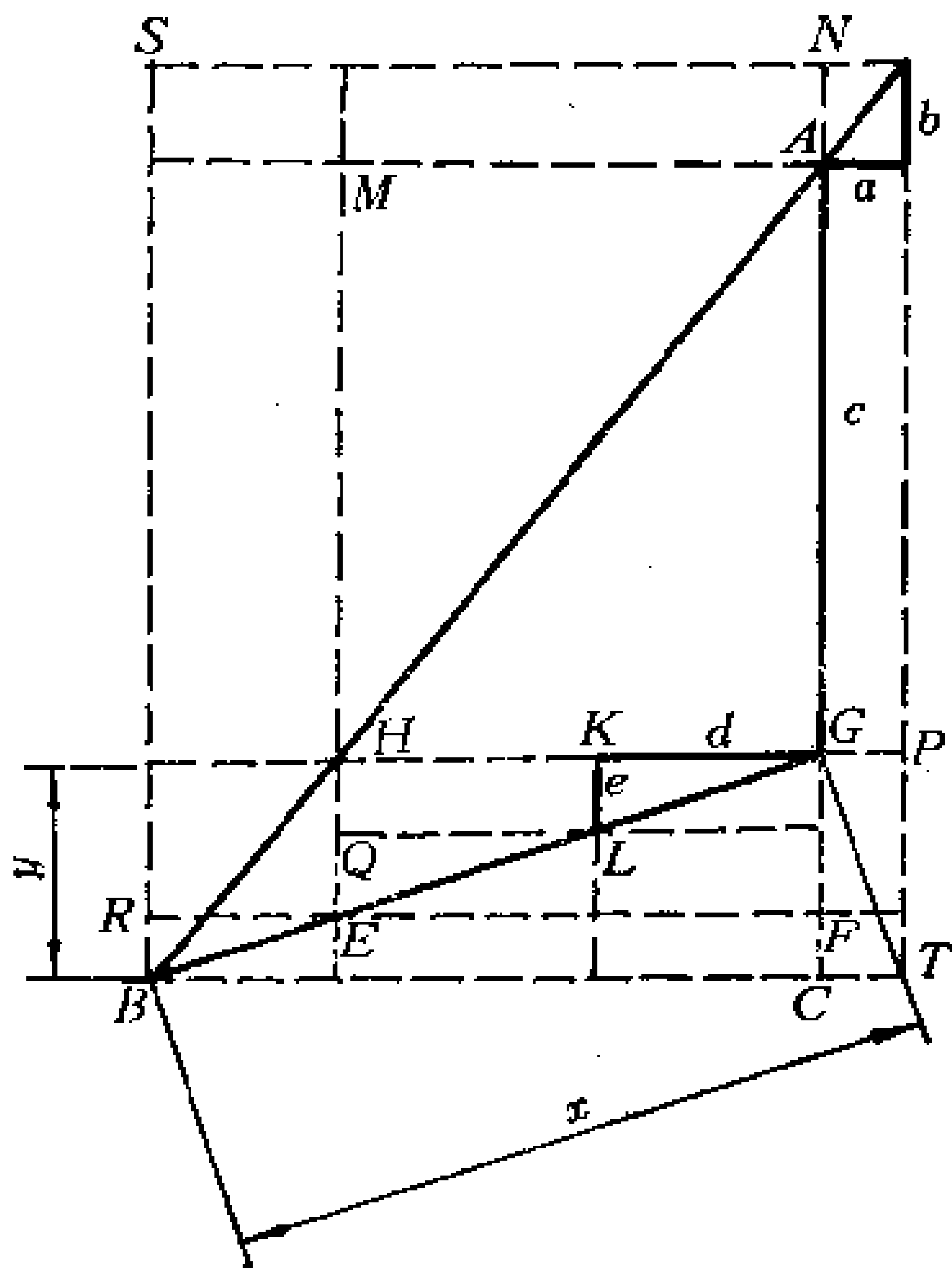


图　6

x)自台址至水际各几何？”(图 6)

依术意：

$$x^2=\frac{c^2(acd)^2[(acd)^2+(ace)^2]}{(d^2+e^2)[(acd)(bcd)-(acd)(ace)]^2},$$

$$y^2=\frac{e^2c^2(acd)^2[(acd)^2+(ace)^2]}{(d^2+e^2)[(acd)(bcd)-(acd)(ace)]^2}。$$

秦氏术可能依下法推导：

$\because$ □MN=□AP $\quad\quad\therefore b\cdot EF=ac$,

即得：$\quad EF=\dfrac{ac}{b}=\dfrac{acd}{bd}$.

$\because$ □KF=□GQ $\quad\quad\therefore FG\cdot d=EF\cdot e$,

即得：$\quad FG=\dfrac{e}{d}EF=\dfrac{ace}{bd}$.

$$EG=\sqrt{\left(\frac{acd}{bd}\right)^2+\left(\frac{ace}{bd}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{bd}\sqrt{(acd)^2+(ace)^2}$$

由$\triangle GBC\backsim\triangle GEF$，得：

$$y:x=\frac{ace}{bd}:\frac{1}{bd}\sqrt{(acd)^2+(ace)^2},$$

$$y=\frac{ace\cdot bdx}{bd\sqrt{(acd)^2+(ace)^2}} \tag{1}$$

$\because$ □AS=□AT

$\therefore BC\cdot b=a(c+y)$

即 $\quad bc\sqrt{x^2-y^2}=ac(c+y) \quad\quad (2)$

由(1)，(2)得：

$$[(acd)(bcd)-(acd)(ace)]x=$$

$$=c(acd)\sqrt{(acd)^2+(ace)^2},$$

即得：

$$x^2=\frac{c^2(acd)^2[(acd)^2+(ace)^2]}{[(acd)(bcd)-(acd)(ace)]^2}.$$

$\because \square KC = \square GR$,

$\therefore \quad dy = BC \cdot e$

即
$$dy = e\sqrt{x^2 - y^2}$$
$$d^2y^2 = e^2(x^2 - y^2)$$
$$y^2 = \frac{e^2}{d^2 + e^2}x^2$$
$$= \frac{e^2c^2(acd)^2[(acd)^2 + (ace)^2]}{(d^2 + e^2)[(acd)(bcd) - (acd)(ace)]^2}。$$

第三问　陆岸测水

"问行师遇水，须计篾缆，搭造浮桥。今垂绳量陆岸，高三丈(b)，人立其上(a)，欲测水面之阔(x)。以六尺(c)竿为矩，平持去目下五寸(e)。今矩本抵颐，遥望水彼岸，与矩端参相合。又望水此岸沙际(y)，入矩端三尺四寸(d)。人目高五尺(a)，其水面阔几何"。(图 7)

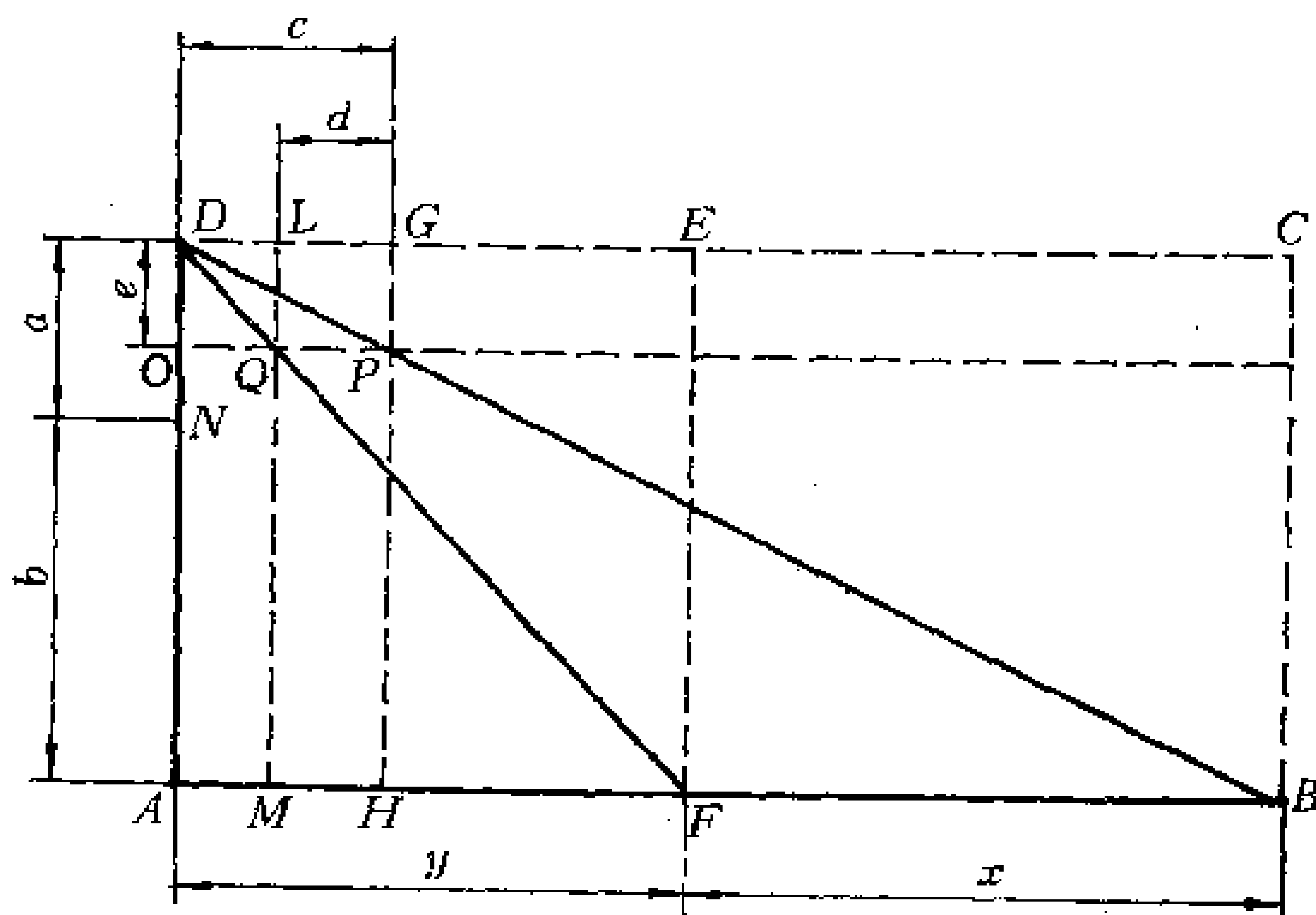


图　7

依术意：　　$x=\frac{(a+b-e)d}{e}$。

$\because \square OC=\square AG$,　　$\square OE=\square AL$。

$\therefore \square OC-\square OE=\square AG-\square AL$。

即　　$\square RC=\square MG$,

$ex=(a+b)d$,

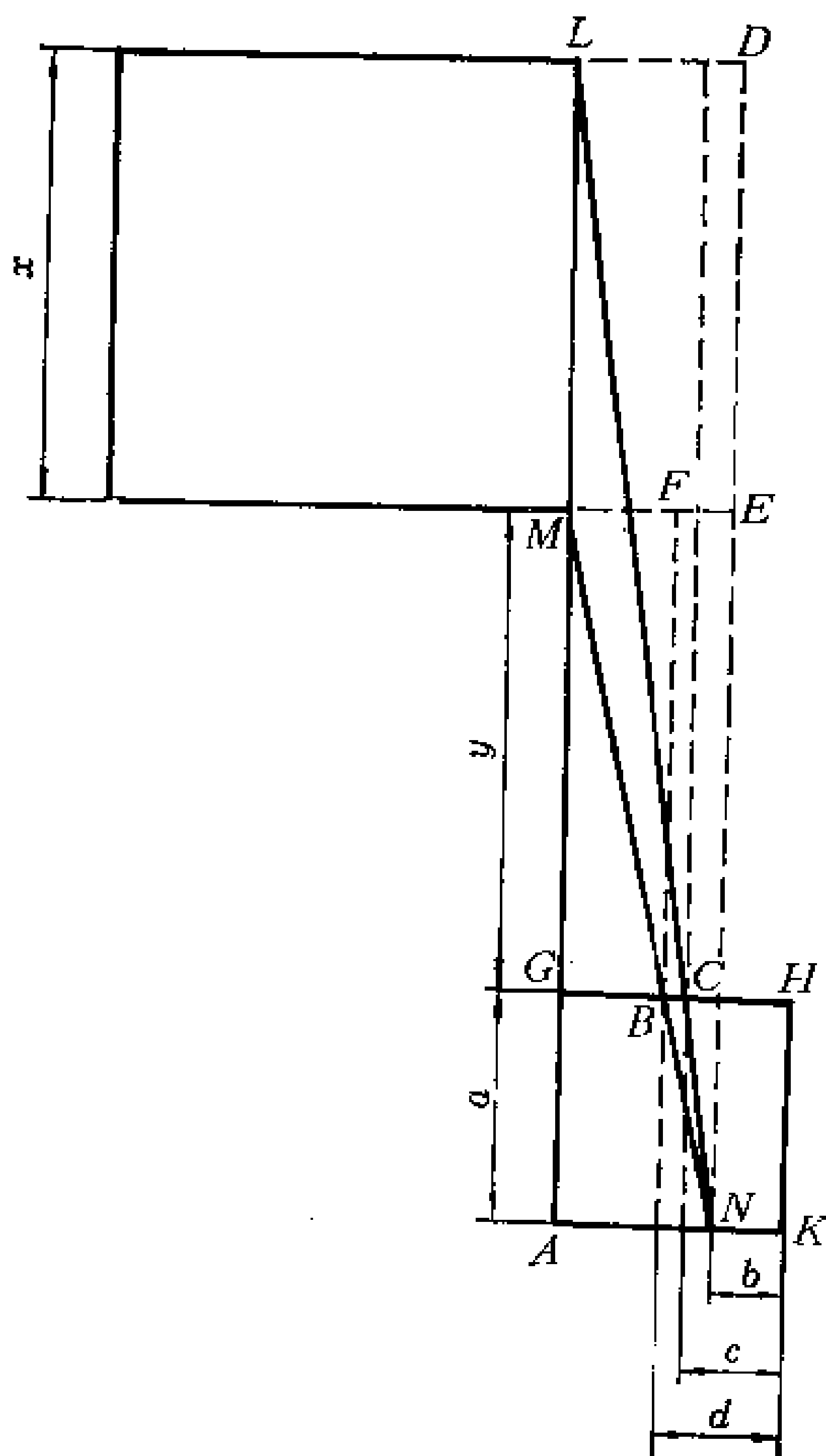


图　8

$$x=\frac{(a+b)d}{e}。$$

秦氏误将□AP当成□AG，□AQ当成□AL，忽视小面积□OG及□OL，以致得出错误的公式。

第四问 表望方城

“问敌城不知广远，傍城南山原林间望之，林际有木二株，南北相去一百六十步(a)，遥与城东方面参相直。于二木之东相对立表，表间与木四平方。人目以绳维之，人自东后表，向西行一十步(b)，望城东北隅。人东前表一十五步(c)。又望城东南隅，人东前表四十八步强半步(d)。里法三百六十步。欲知其方广(x)及相去(y)几何”。(图8)

$$\because □CD=□AC,$$

$$\therefore (x+y)(c-b)=(a-c)a, \qquad (1)$$

又 $\because □BE=□AB,$

$$\therefore (d-b)y=a(a-d)。 \qquad (2)$$

由(1)、(2)两式解得：

$$x=\frac{a(a-c)(d-b)-a(a-d)(c-b)}{(c-b)(d-b)};$$

$$y=\frac{a(a-d)}{d-b}。$$

秦氏误把□FD当成□CD，致使

$$x=\frac{a(a-c)}{c-b};$$

误把□CE当成□BE，致使

$$y=\frac{a(a-d)}{c-b}。$$

第五问 遥度圆城

“问有圆城，不知周径，四中开门。北(门)外三里(a)有乔木，

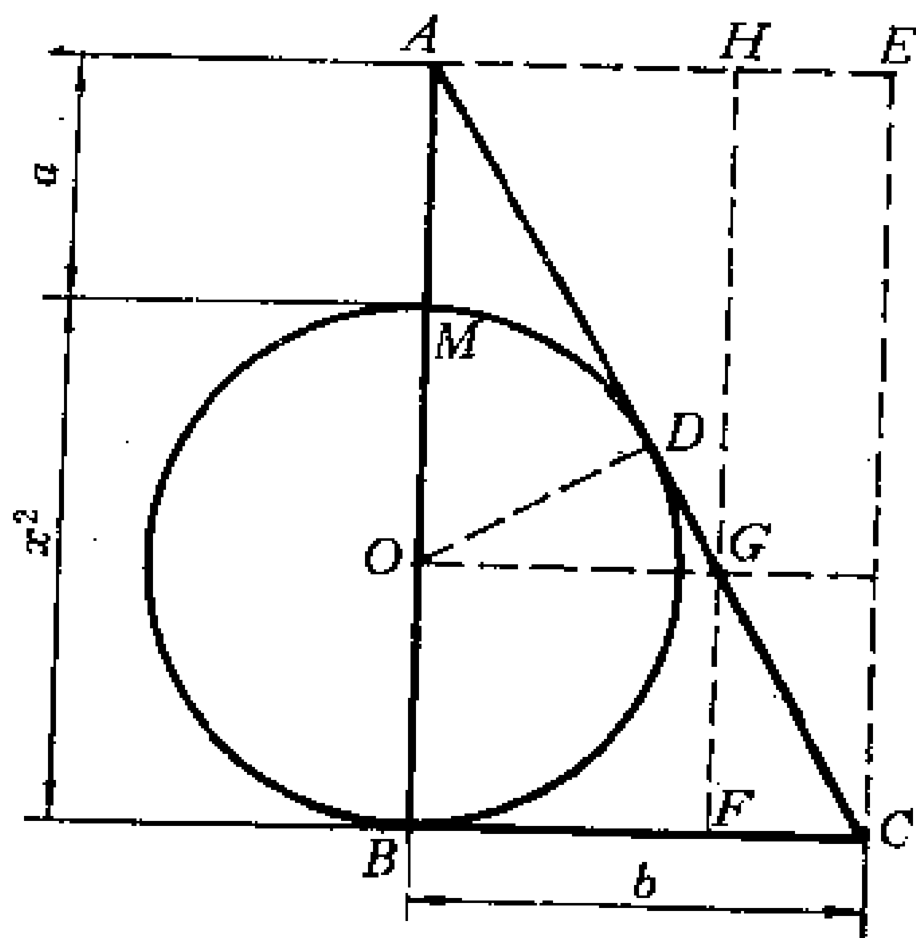


图 9

出南门便折东行九里(b)，乃见木。欲知城周、径(x^2)各几何"。(图9)

依术意，得一不含奇次项之十次方程，即：

$$x^{10}+5ax^8+8a^2x^6-4a(b^2-a^2)x^4-16a^2b^2x^2-16a^3b^2=0。$$

$\because \triangle ADO \backsim \triangle AOG$,

$\therefore AO:OG=AD:OD$,

即得：

$$OG=\frac{x^2(x^2+2a)}{4\sqrt{a(x^2+a)}}。$$

$\because \square FE=\square OC$,

$$\therefore (x^2+a)\cdot FC=\frac{x^2}{2}\cdot b。\qquad (1)$$

而 $\qquad FC=b-BF=b-OG$

$$=b-\frac{x^2(x^2+2a)}{4\sqrt{a(x^2+a)}};$$

代入(1)式：

$$(x^2+a)b-\frac{x^2(x^2+2a)(x^2+a)}{4\sqrt{a(x^2+a)}}$$

$$=\frac{bx^2}{2}。$$

$$2bx^2+4ab=\frac{x^2(x^2+2a)(x^2+a)}{\sqrt{a(x^2+a)}}。$$

两端平方：

$$(2bx^2+4ab)^2=\frac{x^4(x^2+2a)^2(x^2+a)^2}{a(x^2+a)},$$

即

$$a(2bx^2+4ab)^2=x^4(x^2+2a)^2(x^2+a)。$$

展开，移项，即得：

$x^{10}+5ax^8+8a^2x^6-4a(b^2-a^2)x^4-16a^2b^2x^2-16a^3b^2=0$，与秦氏术相合。

沈钦裴及宋景昌解术[9]，在方程两端或故意乘一因式，或故意不约方程两端相同的因式，以凑十次之数。郭书春同志解术，亦有此种缺点[10]。白尚恕先生解术，用《测圆海镜》内"底句明句相乘得半径幂"之理，甚合宋元数学实情，且很自然，为吾人所首肯。此处推导，基于"出入相补"原理，且能化简为繁，作为探讨秦氏原术之一法，尚请大家评论。

第六问 望敌圆营

"问敌临河为圆营，不知大小。自河南岸至某地七里(a)，于其地立两表，相去二步(b)。其西表与敌营南北相直，人退西表一十二步(c)。遥望东表，适与敌营圆边参合，圆法用密率，里法三百六十步。欲知其营周及径(x)各几何"。

依秦术意，得下面四次方程：

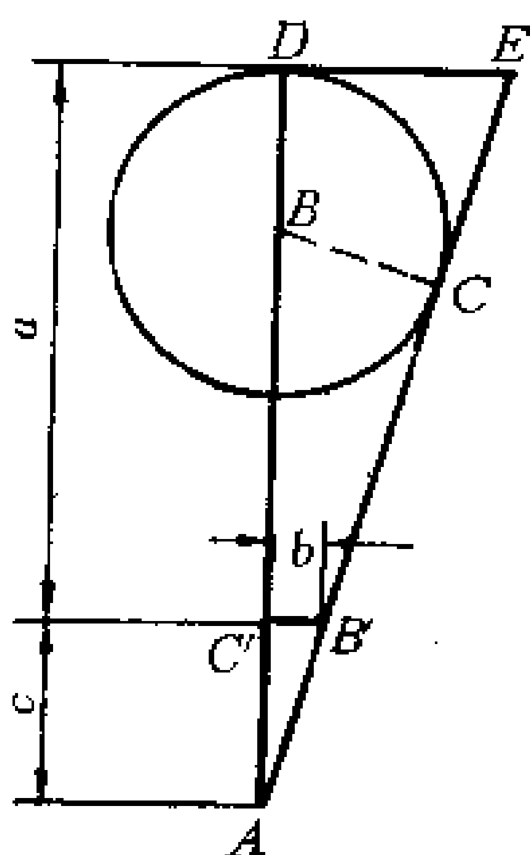


图 10

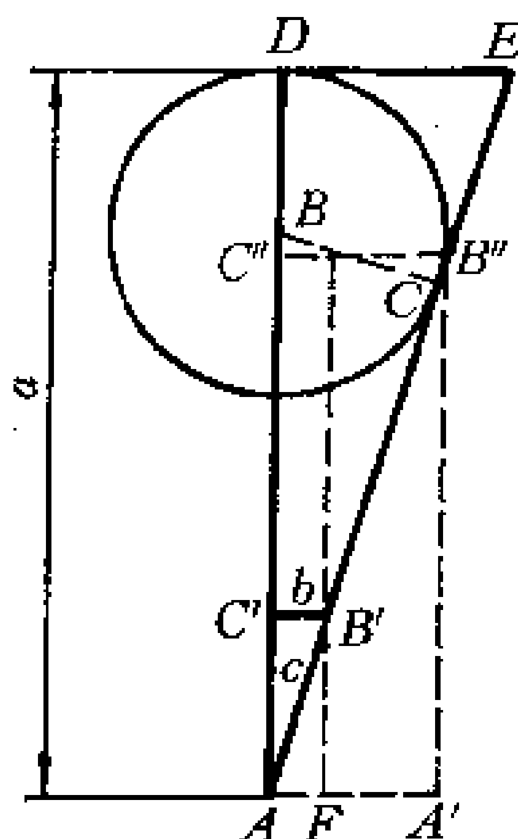


图 11

$$-\left[\frac{c^2-b^2}{4}\right]^2 x^4+\left[a^2 b^2 \cdot \frac{b^2+c^2}{2}\right]x^2-(a^2b^2)^2=0。$$

由秦氏题意，其图应为图10，我同意白尚恕先生分析[9]，秦氏误a为$a+c$，还误以为$AB'=c$，结果变图为图11。

在图11中，AD上取C''，使$AC''=AC$，作□$AA''B''C''$。

$$AC''=AC=\sqrt{AD\cdot AG}$$

$$=\sqrt{a(a-x)},$$

$$C''B''=BC=\frac{x}{2},$$

$\because$ □$C''F=$□$C'A'$，

$\therefore AC''\cdot AF=C''B''\cdot AC'$，

即 $\sqrt{a(a-x)}\cdot b=\frac{x}{2}\sqrt{c^2-b^2}$，

平方： $ab^2(a-x)=\frac{c^2-b^2}{4}x^2$，

$$-ab^2x=\frac{c^2-b^2}{4}x^2-a^2b^2,$$

再平方：

$$a^2b^4x^2=\left(\frac{c^2-b^2}{4}\right)^2x^4-a^2b^2\cdot\frac{c^2-b^2}{2}x^2+(a^2b^2)^2,$$

即

$$-\left(\frac{c^2-b^2}{4}\right)^2x^4+\left[a^2b^2\cdot\frac{b^2+c^2}{2}\right]x^2-(a^2b^2)^2=0。$$

第七问　望敌远近

“问敌军处北山下，原不知相去远近。乃于平地立一表，高四尺(a)。人退表九百步(b)，步法五尺，遥望山原，适与表端参合。人目高四尺八寸(c)。欲知敌军相去几何(x)”。(图12)

$\because \square DH=\square BF,$

$\therefore cx=(x+b)a。$

即 $$x=\frac{ab}{c-a}$$

与秦术相合。

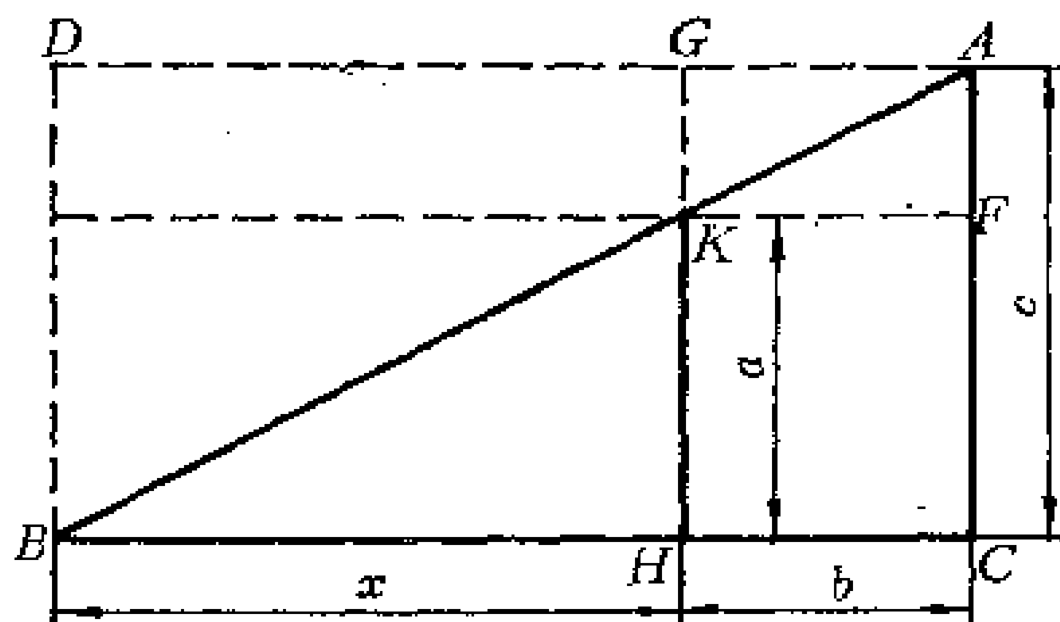


图　12

第八问　表望浮图

"问有浮图欹侧，欲换塔心木，不知其高。去塔六丈(a)有刹竿，亦不知其高。竿木去地九尺二寸始钉锔。锔一十四枚，枚长五寸，每锔下股相去二尺五寸(k)。就竿为表，人退竿三丈(c)，遥望浮图尖，适与竿端斜合。又望相轮之本，其景入锔第七枚(h)上股，人目去地四尺八寸(d)，心木放三尺为楯而鷇截。欲求塔高($AB=x$)轮高($AK=y$)、合用塔心木长各几何"。(图13)

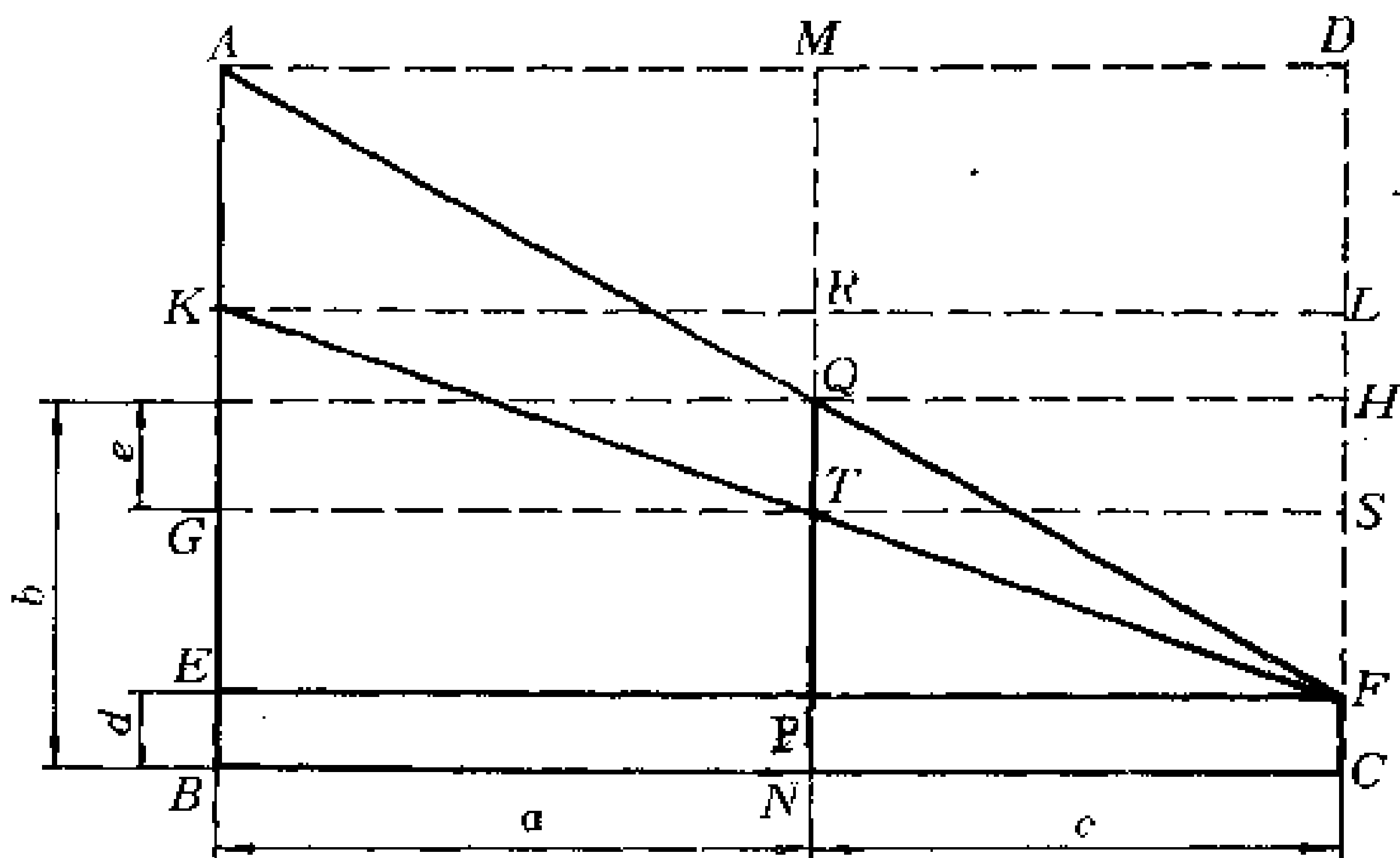


图　13

表高：$b=2.5尺\times(14-1)+0.5尺+9.2尺$

$=42.2尺$。

$e=(h-1)\cdot k=(7-1)\times2.5尺$

$=15尺$。

$\because \square EQ=\square QD$，(设$DH=z$)

$\therefore a(b-d)=cz$，　$z=\dfrac{a(b-d)}{c}$。

$$x=z+b=\frac{a(b-d)}{c}+b$$

$$=11\text{丈}7\text{尺}。\qquad (1)$$

$\because \square PD=\square EH$, $\square PL=\square ES$,

$\therefore \square PD-\square PL=\square EH-\square ES$,

即 $\square RD=\square GH$。

$$cy=(a+c)e$$

$$\therefore\ y=\frac{(a+c)e}{c}=4\text{丈}5\text{尺}。\qquad (2)$$

塔身高为：$x-y=7$ 丈 2 尺。

塔心木长为：$x-y+3$ 尺 $=7$ 丈 5 尺。

秦氏之x与(1)式相合。而他误以 $\square EQ$ 为 $\square EH$，$\square ET$ 为 $\square ES$，故得出错误的

$$y=\frac{ae}{c}=3\text{丈}。$$

以致使塔身高、塔木心长皆误。

附 言

李继闵同志的《从句股比率论到重差术》[11]一文中提出我国古代测望理论的发展过程为：出入相补——→相似句股理论——→重差术。他以刘徽"不失本率"原理等价于下述命题：

"凡句中容横，股中容直，二积相同"。从而断定"不失本率原理是建立在'出入相补'原理基础之上的"。

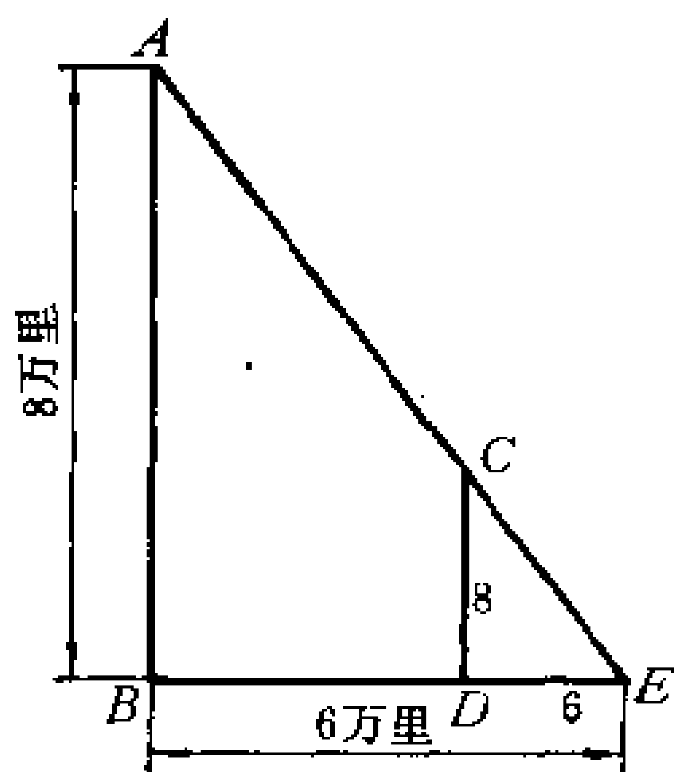


图 14

刘徽的相似句股比例理论是否建立在"出入相补"原理之上，这个问题尚需进一步讨论。我的看法

是：在句股章刘徽注中并未有提供这样的证据。刘徽对容方、容横、容直各种情形皆以比例线段立论，与面积无涉。我认为刘徽的相似句股比例理论，来源于更早的测日术。《周髀》说："周髀长八尺，……候句六尺……，以句为首，以髀为股，从髀至日下六万里而髀无影。从此以上至日，则八万里"。(图14)从《周髀》本文看，只是一表测日，还没有重差术的概念，但利用了相似句股形。这种测日术当起源很早，是人们在实践当中得出的方法，并不一定由"出入相补"原理推导出来。历史的发展未必一定与逻辑演绎的顺序相合。刘徽在古代测日术的基础上发展了相似理论。正如白尚恕先生所指出的他已认识到句股形相似的各种条件。[4]

所以，我认为我国古代测量术的发展过程如下表所示，似比较真实。现提出来，与李继闵同志商榷。



赵爽与刘徽之间的关系，尚未研究清楚。

参 考 文 献

〔1〕吴文俊：《海岛算经》古证探源，《九章算术》与刘徽，北京师范大学出版社，1982。
〔2〕秦九韶：数书九章，宜稼堂丛书本。
〔3〕钱宝琮：秦九韶《数书九章》研究，《宋元数学史论文集》，科学出版社，1966。
〔4〕白尚恕：《九章算术》与刘徽的几何理论，《九章算术》与刘徽，北京师范大学出版社，1982。
〔5〕李培业：刘徽是怎样建立"重差术"的，《安康教育》，1980年第三期。
〔6〕杨辉：《算法通变本末》卷上，《杨辉算法》，勤德书堂刊本，1378。
〔7〕杨辉：《续古摘奇算法》卷下，同上。
〔8〕吴文俊：我国古代测望之学重差理论评介兼评数学史研究中某些方法问题，科技史文集第8辑，1982年。

〔9〕白尚恕：秦九韶测望九问造术之探讨，《宋元数学史论文集》，科学出版社，1966年。
〔10〕郭书春：学习《数书九章》札记二则，科技史文集 第8辑，1982年。
〔11〕李继闵：从句股比率论到重差术，全国自然科学史学术会议论文，1980年。

秦九韶与土木建筑学

沈　康　身

周密(1232—1298)《癸辛杂识续集下》记秦九韶的营建活动说："有地在湖州西门外，地名曾上，正当苕水所经，入城面，势浩荡……建堂其上，极其宏敞。堂中一间横亘七丈，求海桭(筏)之奇材为前楣①。位置皆自出心匠，凡瓦脊、两翚②、搏风③，皆以砖为之。堂成七间，后为列屋。……其始谪梅离家之日，大堂前大楣中断，人谓不祥。"从此可见秦精心设计过"极其宏敞"的七开间住宅。按今存山西省五台县佛光寺金建文殊殿(1137年)面阔也是七间，明间、次间用减柱造复合梁，跨度为14.12米，为《癸辛杂识》所记提供了实物旁证。秦九韶选用进口上等木材，使明间额枋跨度长达七丈(约合20米)这是极大胆的构思④。秦于1244年到浙江湖州营建住宅，于1260年被贬谪广东梅州，如此大跨于建屋后十六年"前楣中断"是很可能的。秦九韶政治生涯中曾任和州(今安徽和县)守、琼州(今广东琼县)守、蕲州(今湖北蕲县)通判、建康(今江苏南京)通判，所以在处理本职工作中必须熟悉城建、军工、农田、水利等土木工程之学，在《数书九章》中所记大量有关事项足以说明他在这一领域内也堪称能手：其中第七章，即卷13卷14专论营建计算，也有散见其他各章的。如果与同代有

---

① 前楣即额枋，江南称桁梁。

② 翚，音挥。两翚，指屋脊两端鸱吻。

③ 搏，音卜，义：捕捉。搏风，指屋顶两山墙装饰。

④ 《营造法式》卷26诸作料例中模枋是梁材的最大尺寸：长八十尺至六十尺，广三尺五寸至二尺五寸，厚二尺五寸至二尺。这种材料仅作库存，不大用于实际施工。



图1 《武经总要》卷12城制插图。图中正中重檐城楼，下为城羊马墙。



门，左右为敌楼。城上女墙分明。城壕与大城间矮墙即

关专著及传世文物作一比较，不难发现秦所论述大率切中当时有关情况，所论问题尤能定量细致描述，某些正可以作为建筑历史文献的补充和旁证。

1. 城　　池

在封建社会，城池建设大都受《周官·考工记》影响，城以方整为主。周王城规模是“方九里、旁三门”。以后各朝名城迭出，汉唐两都：长安、洛阳即为著例。由于各种原因我国古城保存至今已极少见，城建专著素无问世，幸筑城之制在有关典籍中尚有零星记载。

北宋曾公亮《武经总要》(1044年，下简称《武经》)前集卷12守城篇有图、有说。略称：“三里之城万家守之足矣，作四门……城外凿壕，去大城约三十步。上施钓(吊)桥。壕之内岸筑羊马城，去大城约十步。凡城上皆有女墙。每十步及马面皆设敌棚、敌楼。”“筑城之法，每下阔一丈上收四尺。凡城高五丈、底阔五丈，上收二丈，尤坚固矣。”“羊马城高可一丈以下，八尺以上。”“女墙高可五尺”“壕面各随其地为阔狭，大要在面阔、底狭，其深及泉，使箭炮难及，即住。”(图1)

北宋李诫《营造法式》(1103—1106年，下简称《法式》)卷3论壕寨制度：“筑城之制，每高四十尺则厚加高一十尺。其上斜收减高之半。若高增一尺，则其下厚亦加一尺，其上斜收亦减高之半。”“城基开地，深五尺。其厚随城之厚。每城身长七尺五寸栽永定柱(长视高、径一尺至一尺二寸)夜叉木(径同上、其长比上减四尺)各二条。每筑高五尺，横用纴木一条(长一丈至一丈二尺，径五寸至七寸)每橡长三尺，用草葽一条(长五尺径一寸，重四两)。木橛子(头径寸，长一尺)。同书卷1总释引《周官·考工记》制度时又说：“城以盛民也。堞、城上女垣也。城上垣谓之睥睨，言于孔中睥睨非常也……，亦曰女墙，言其卑小比之于城，若女

子之于丈夫也。”

《数书九章》卷13第1题“计定城筑”记宋时地方城池做法，根据题文、术文、演草及答案，宋城结构赫然可见，我们为之分段说明并为补图。

1.1 一般布局

题文：“问淮郡筑一城，围长一千五百一十丈，外筑羊马墙，开濠。……，城身高三丈，面阔三丈，下阔七丈五尺。羊马墙高一丈、面阔一丈。开濠面阔三十丈，下阔二十五丈。……取土用穿四、坚三为率。”

城围1510丈，约合10里，每边2里半。与《武经》所说“三里（见方）之城，万家守之足矣”大致相符。

平面布置：大城、羊马墙、城濠等与《武经》所说一致。濠面阔达三十丈，约合百米，与“箭炮难及即住”要求符合。

城身造法与《武经》所说大体能合，大城下阔75尺，应上收 $7.5\times4=30$尺，上阔应是45尺，当更为稳定。

羊马墙尺寸则与《武经》规定同。

开濠挖土按四比三折合为建大城及羊马墙所需坚土二者出入平衡①。（图2）



图2 淮郡城池剖面图

① 《九章算术》商功章第1题术文：“穿地（挖土）四、为壤（壤土、耕作用松土）五、为坚（土）三”。开濠挖土截面为$\frac{300+250}{2}\times8$（平方尺）大城及羊马墙截面和按4:3折成穿土为：

$$\left(\frac{30+75}{2}\times30+\frac{10+5}{2}\times10\right)\times4\div3\text{（平方尺）},$$

二者都等于2200（平方尺）。濠深尺寸见本题答案。

1.2 女墙造法

题文："女头鹊台共高五尺五寸，共阔三尺六寸，共长一丈。鹊台长一丈、高五寸、阔五尺四寸。座子长一丈、高二尺二寸五分、阔三尺六寸。肩子高一尺二寸五分、阔三尺六寸、长八尺四寸。帽子高一尺五寸、阔三尺六寸、长六尺六寸。箭窗三眼各阔六寸、长七寸五分，外眼比内眼斜低三寸。"

女头鹊台即《武经》所说女墙，题文说共高5.5尺与《武经》所记"高可五尺"一致。这也是《法式》所说堞、女垣。女墙的功能是"孔(箭眼)中睥睨非常，用以攻敌。"题文说外眼比内眼斜低三寸，居高临下，能攻能守，设计合理。题文还给出女墙细部结构及尺寸是难得的材料。(图3)

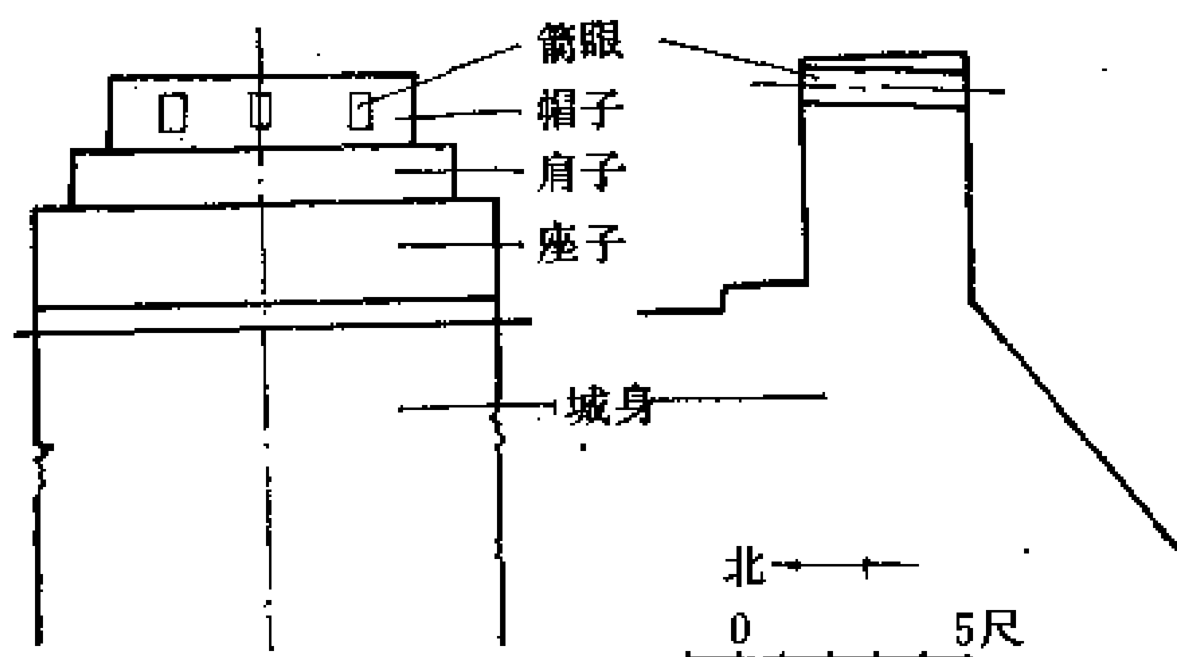


图3 淮郡城墙女头鹊台正面、剖面图

1.3 砖包、石基、木骨、土心城身造法

题文："周回石版，铺城脚三层。每片长五尺、阔二尺、厚五寸。""通身用砖包砌，下一丈九幅、中一丈七幅、上一丈五幅。砖每片长一尺二寸、阔六寸、厚二寸五分。""护险墙高三尺、阔一尺二寸。下脚高一尺五寸，铺砖三幅；上一尺五寸，铺砖二幅。""每长一丈，用木物料：永定柱二十条、长三丈五尺、径一尺。""爬头拽后木共八十条、长二丈、径七寸。""抟子木二百条、长一

丈、径三寸。”“纴①橛二千个，每个长一尺、方一寸。”“纴索二千条，长一丈、径五分。”

题意城身每长一丈(高三丈)全用砖包，其做法是：

从地面起高一丈范围内顺砌四十皮，进深九砖，共进深$0.6\times9=5.4$尺；从高一丈起至二丈范围内，顺砌四十皮，进深七砖，共进深$0.6\times7=4.2$尺；从高二丈起至顶也顺砌四十皮，进深五砖，共进深$0.6\times5=3$尺。三者平均折算进深七砖，平均进深4.2尺，因此演草说城长一丈共用砖

$$10^2\times3\times7\div(1.2\times0.25)=7000(\text{片})。$$

加固城身另做护险墙从地面起高一尺半范围内，丁砌六皮，进深三砖；高一尺半至三尺，丁砌六皮，进深二砖，平均进深二砖半，因此演草说城长一丈护险墙用砖

$$10\times1.5\times5\div(0.6\times0.25)=500(\text{片})②。$$

石基顺砌三层，进深同城身下层共进深，因此演草算得城长一丈共用石

$$10\times5.4\times3\div(2\times5)=16.2(\text{片})③。$$

为增强城身抗剪、抗弯应力，土心城墙加用木骨，从题文看淮郡所配木料是富裕的，城长一丈用①永定柱2根、②爬头拽后木8根、③抟子木20根、④纴橛2000个⑤纴索2000条。对照《法式》壕寨制度所用木料名称、尺寸大同小异，而用料较多。其具体结构虽已不可详考，大抵①②二项为竖材，③④为横材，再以笱卯、纴索连系，相互组搭，纵横交错，形成有负荷功能的空间格网结构，以为城身强有力土心骨料，这是可以肯定的。

秦氏在题中所称淮城，淮阴(江苏)属金，秦氏籍宋未必到过，可能所记为淮阳(河南)。据民国《淮阳县志》卷4记："明洪

① 纴，音任。义：交织。

② 原题演草根据用砖尺寸又算出城长一丈女头鹊台用砖999块。"并三项砖得八千四百九十九片"，"以城通长乘丈率……城砖"共用砖$(7000+500+999)\times1510=12833490$(片)。

③ 秦九韶答案误作十片，宋景昌《数书九章札记》(下简称《札记》)改正。

武驻跸于兹，命指挥贾齐等守焉。辛亥(1372年，在秦后一百余年)指挥陈亨易城砖，袤七里有奇、高三丈。址广五丈五尺，顶广不及址十之三(按即顶广三丈八尺五寸)。……敌台三十九，堞计二千七百。……外环护城。”由此可见秦题淮城规模与之相仿佛，并非虚构，其来有自。

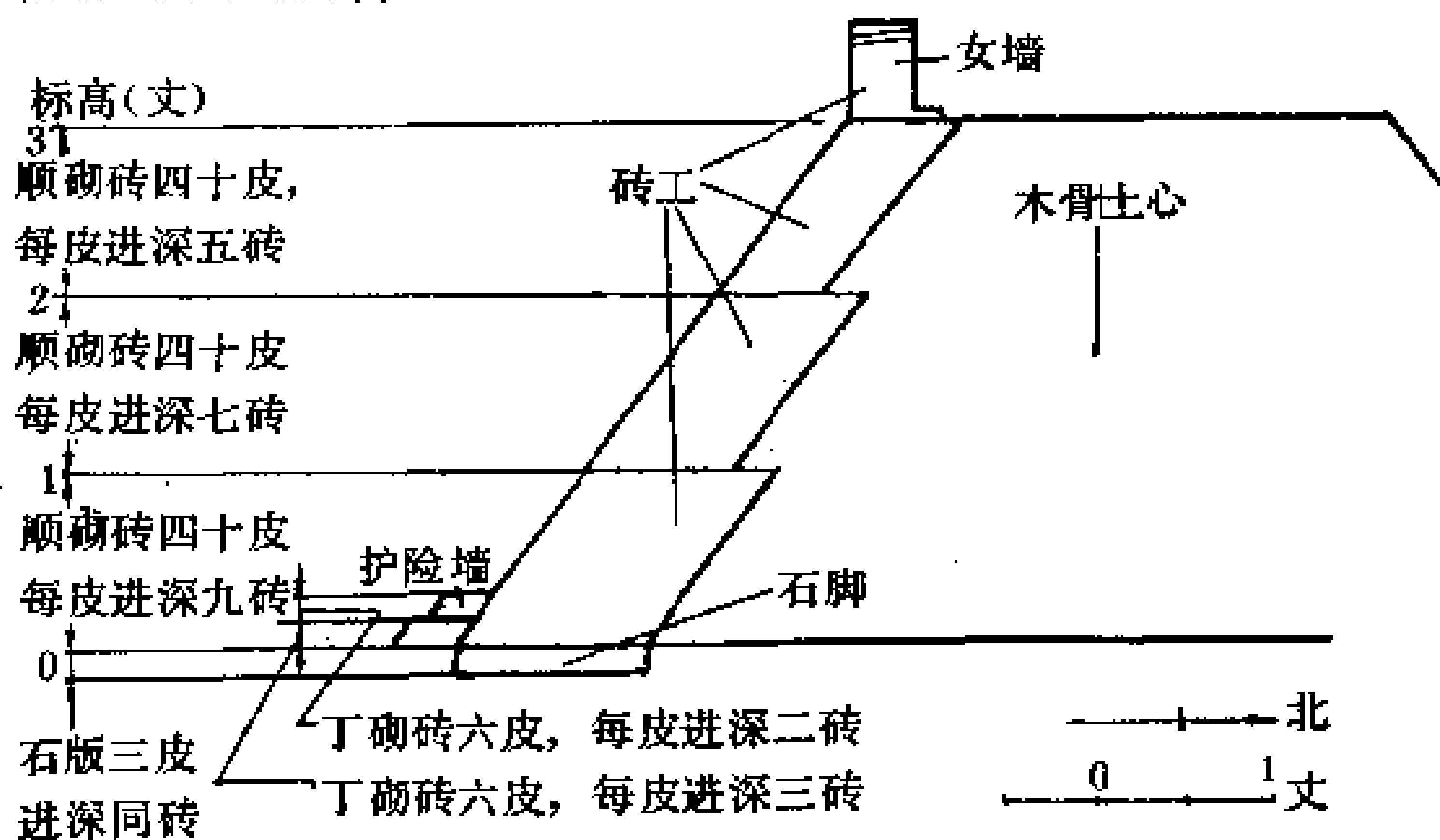


图4 淮郡城墙砖石用料图

根据近年实测古城断垣资料来鉴定秦题，其数据也翔实可靠。例如河北省正定县古城墙系明清时真定府城旧物，是唐宋以来原土建城墙基础上发展起来的。今存城身较完整部分，上顶宽约九米五、六(约合三丈)①。城墙外侧砖砌，从残迹部分看，原做法或用城砖，规格0.46×0.23×0.1(单位米，约合1.4×0.7×0.3，单位尺)或用小砖0.33×0.17×0.06(单位米，约合1×0.5×0.2，单位尺)。一般用城砖砌进深四砖，用小砖砌进深五、六砖不等。大体砖砌进深在1.1米或1.2米(约合四尺)。城心夯筑素土，一般层厚0.2米上下。城脚砌青条石两层，层厚约0.3米(约合一尺)。四城门外还重点设防，类似秦题所说羊马墙而不通体连

① 南宋每尺合0.309—0.329米不等，这里作0.32尺折算。

贯①。又如1984年中国社会科学院考古研究所和浙江省文物考古所在杭州市万松岭路南面山坡发掘南宋皇城，出土皇城北城墙，墙顶宽10米左右，两面有砖层保护，中间是夯土，与秦题所设相合。

2. 高　　台

高台建筑在居住生活上可以防潮、可以临风，又为天文观测、军事防御所必需。历史上很早就有这种建筑形式，西亚两河流域观象台、通天塔以及史称巴比伦空中花园均属之。从考古发掘和文献记载，我国远自夏、商、周三代以来高台建筑已盛行：有的利用天然地形，有的人工夯土成台，四周砌以砖石，台上营建宫室以应各种特殊需要。但迄今对这种建筑形式和结构甚少论述。

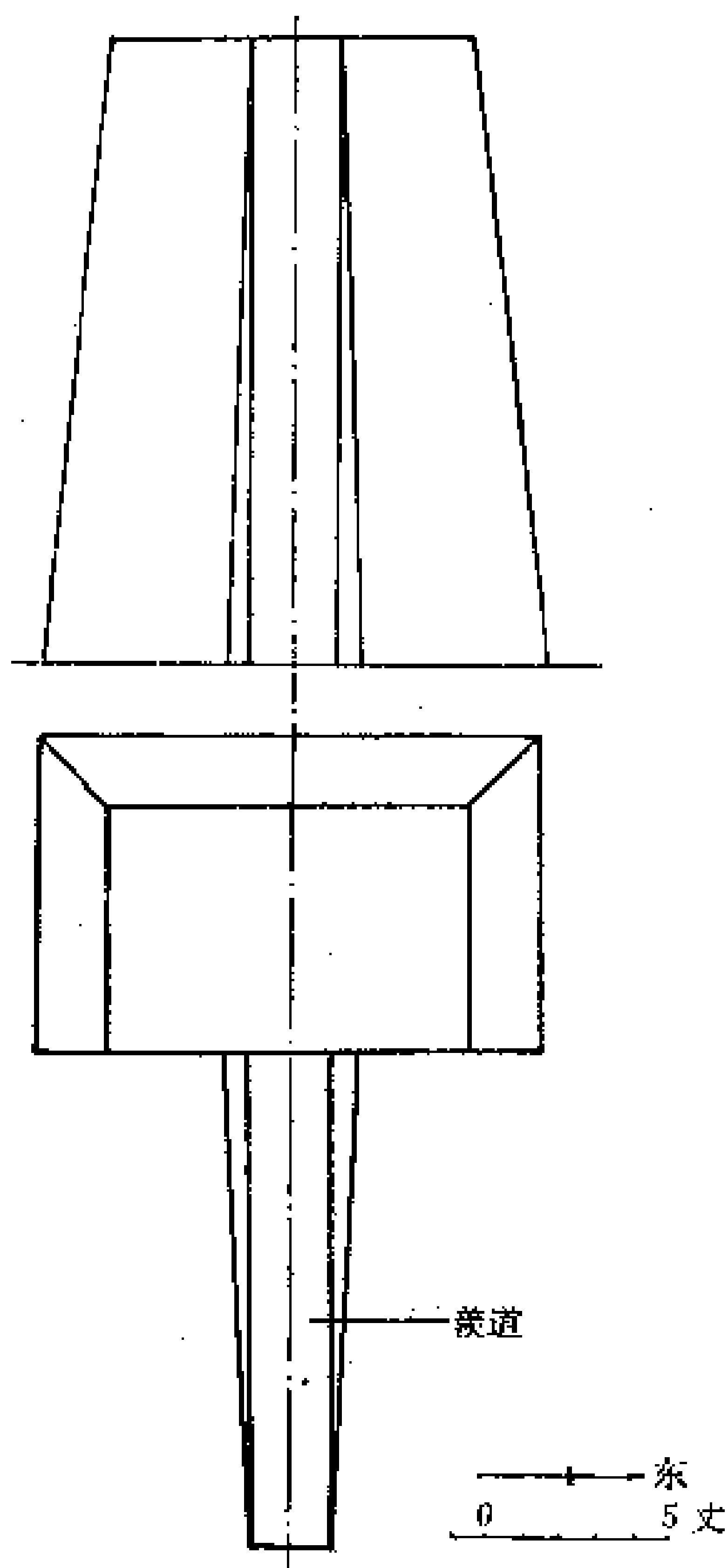


图5 《缉古算经》观象台正面、平面图

数学文献唐王孝通《缉古算经》(七世纪初)第2题记天文历法专用太史所造仰观台，从题文及答案知此高台形状为一拟柱体，其大小尺寸是："台高十八丈、上广七丈、下广九丈，上袤十丈、下袤十四丈。羡道高十八丈、上广三丈六尺、下广二丈四尺、道

① 实测资料见王璞子(故宫博物院)，明清真定府城，《中国古代建筑技术史》油印稿，1979。

长十四丈。"规模恢宏。从题文看，此台靠南面、即东西向前壁为竖直面，从地面到台顶，唯一通道——羡道，坡度陡峭达$\frac{18}{14}>1$。高台收分为$\frac{1}{9}$。(图5)

描绘北宋晚期宣和年间(1119—1125年)汴京繁荣景象的张择端《清明上河图》上有城门、系高台建筑。据此轴测图附近人物高底推算，此高台视《缉古算经》仰观台具体而微，顶系2×4，基部4×6，高3(单位丈)，从地面到台顶也有唯一通道，坡度也是斜率大于1，十分陡峭，高台收分约为$\frac{3}{10}$。(图6)



图6 《清明上河图》城门高台建筑

《数书九章》卷14第1题"计作清台"记有高台建筑，我们分土心台体、砖包石基、螺旋盘道三方面探讨。

2.1 土心台体

题文："正高一十二丈、上广五丈、袤七丈，下广一十五丈、袤一十七丈。其袤当东西、广当南北。"

此台规模与《缉古算经》所记仰观台相仿佛，而四面收分都取$\frac{5}{12}$，视《清明上河图》城门高台更臻稳定。

2.2 砖包、石基

题文："台下铺石脚七层，先用砖包台身。""石长五尺、阔二尺、厚五寸，砖长一尺二寸、阔六寸、厚二寸五分。"题文没有讲进深砌多少砖块，参照术文、演草及答案，宋景昌《札记》认为"台身外四面砌砖，多加六尺。"这就是说高台系土心，外包顺砌进深十砖，或丁砌进深五砖。即包砖后高台实际尺寸是上底6.2×8.2，下底16.2×18.2(单位丈)。这种做法与《法式》卷15垒阶基之制："高四丈以上者用六砖相并"所要求是符合的。(图7)

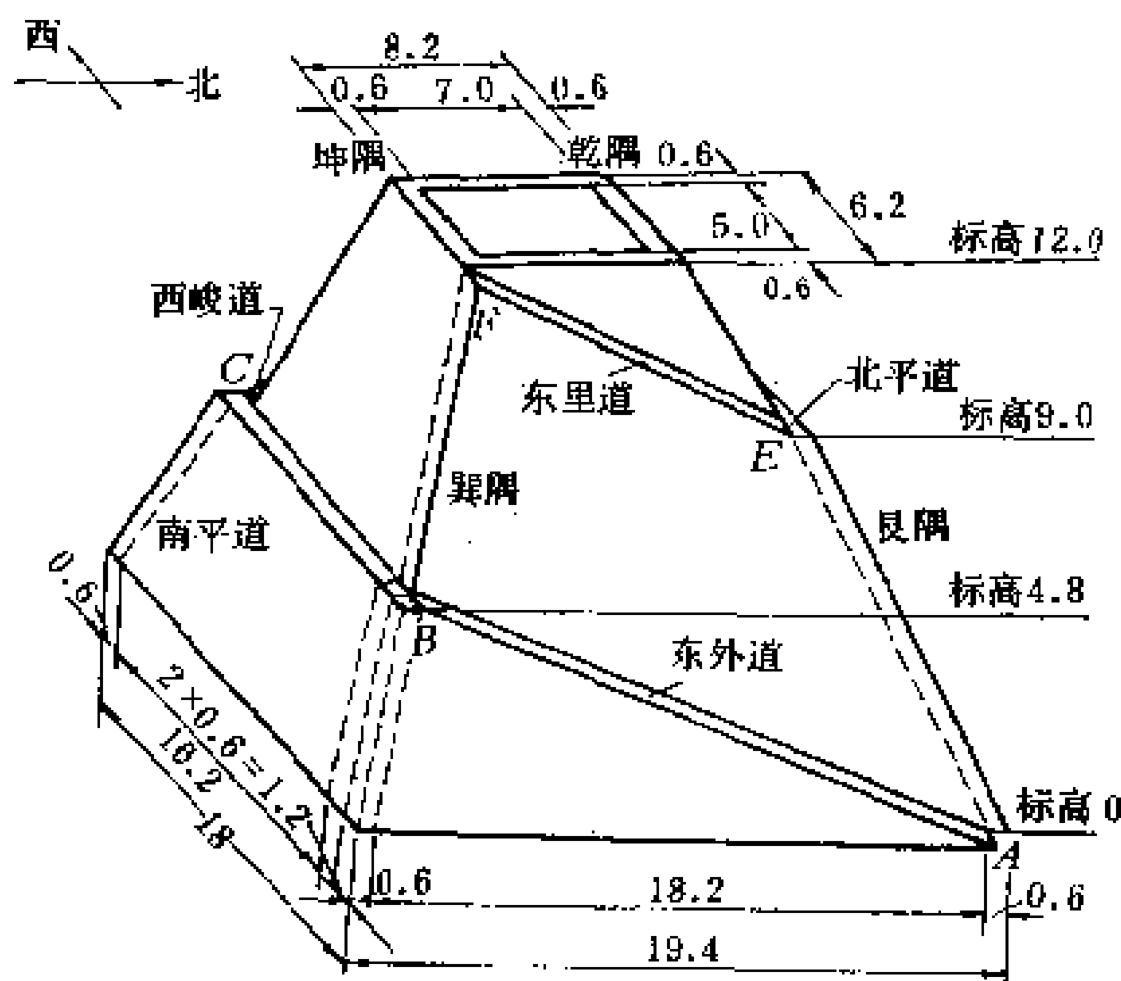


图7 清台示意图

2.3 螺旋盘道

题文："次用砖叠砌转道，周围五带，并阔六尺。须令南北二平道，东西三峻道相间。始自台之艮隅，于东外道向南顺升。由巽隅以西左转，周回历北复东，再升东里道，至巽隅乃登台顶。其东里道艮隅与北平道两隅、及西道乾隅之高皆以强半。其西道坤隅

与南道两隅、东外道巽隅之高以五分之二。峻道每级履高六寸。”

《缉古算经》用单跑羡道，斜率大于1，借此上、下十八丈高台很不方便。本题采用周围螺旋盘道，在建筑设计上是一大进步。

沈括《梦溪笔谈》卷18技艺营舍之法，论阶级有峻、平、慢三等。本题则设峻道三、平道二。题意登台盘道从台基东北角(艮隅)起始为斜坡(AB、峻道称东外道)到东南角(巽隅)拐西为南平道(BC)，至西南角(坤隅)拐北为斜坡(CD、称西峻道)迄西北角(乾隅)。然后折向东为北平道(DE)。迄东北角弯向南又为峻道(EF、称东里道)直达台顶。各转折点标高根据题意，B：$12\times\frac{2}{5}=4.8$(丈)，E：$12\times\frac{3}{4}=9.0$(丈)。盘道宽度六尺，行人登、降照面已绰乎有余。题文规定每级高(履高)六寸，合公制16厘米左右，与今用相同。

东外道　其下砖壁为一三角形，西峻道、东里道下砖壁各构成一不规则四边形(图8)。其有关数据可计算如下表：

道　　　　名	东　外　道	西　峻　道	东　里　道
升　角	17°.2	19°.2	20°.8
级　数	80	70	50
道长(丈)	17.59	13.82	9.14
平距(丈)	0.220	0.197	0.183
道下砖壁面积(方丈)	48.88	97.04	154.70

每级平距，题文称踏纵，《法式》称广。《法式》卷15砖作制度说：“踏道每一踏高四寸、广一尺”本题每级既定高为六寸，各峻道之广分别算得为22、19.7、18.3寸。秦所用绝对尺寸偏大，而斜率$\frac{6}{22}$，$\frac{6}{19.7}$，$\frac{6}{18.3}$，均视《法式》所定$\frac{4}{10}$为平缓。

从现存实物看，螺旋盘道高台建筑以元初(1271年元朝始)所建河南登封县郜成镇观星台与本题所记高台最相类似。观星台台

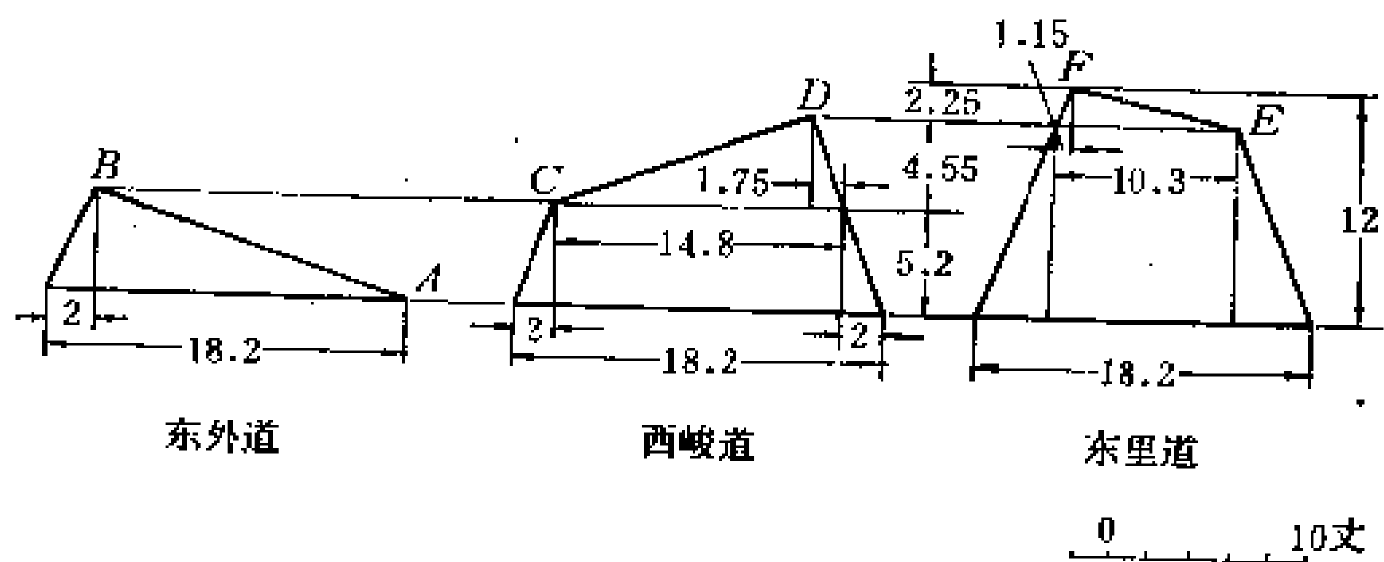
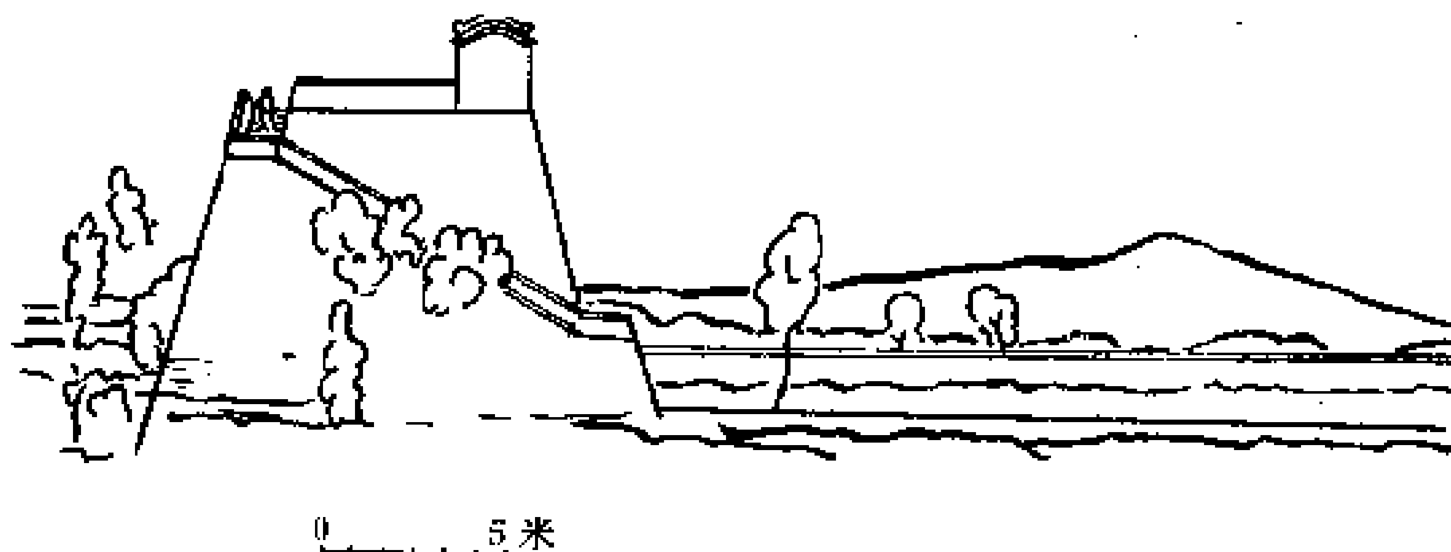


图8　三峻道下砖壁面



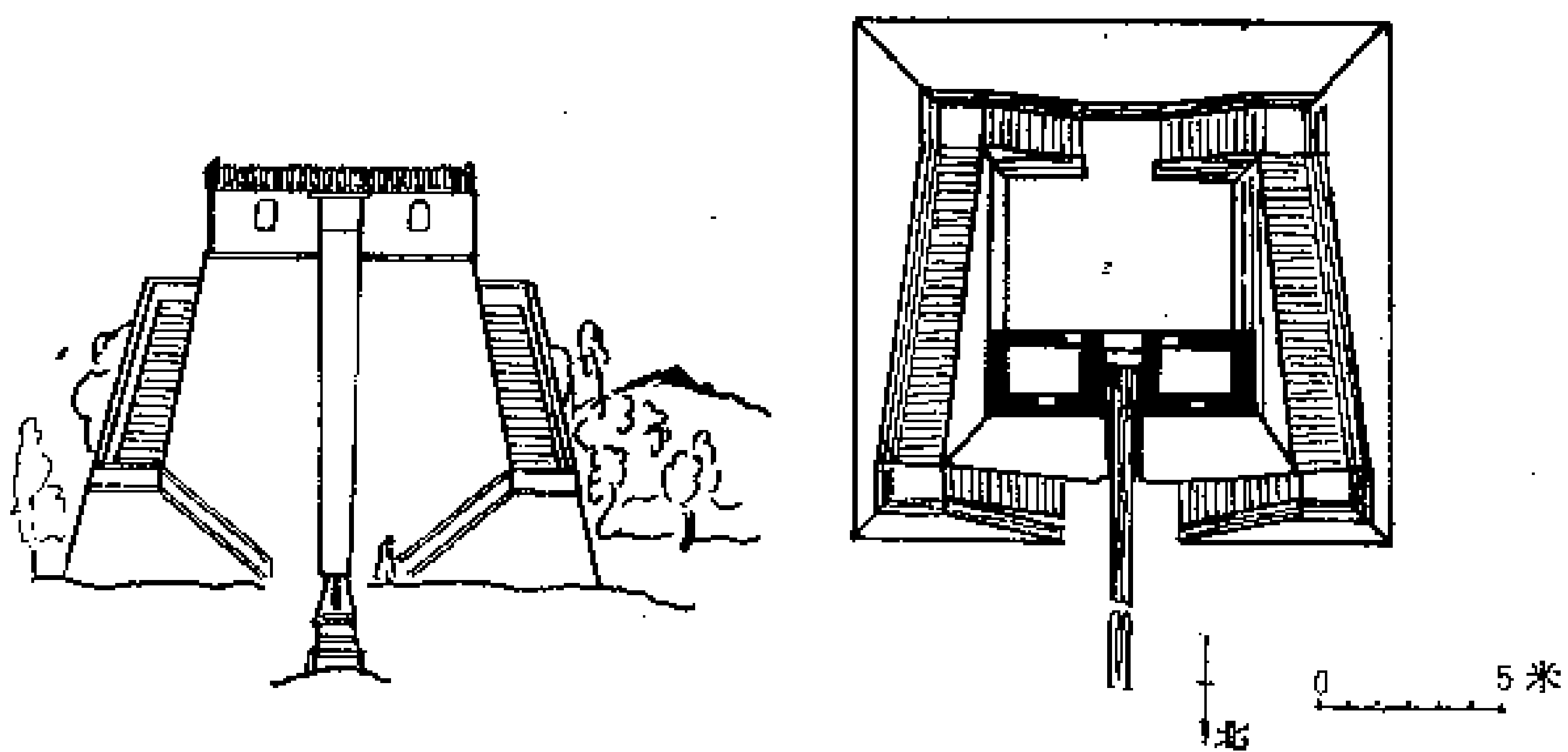


图9　登封观星台

基16.88×16.7(单位米，合5.28×5.22丈)，台顶8.16×7.82(单位米，合2.55×2.44丈)，高10.49(单位米，合3.28丈)，除其北侧面因安放铜表陡直外，其余各面收分约$\frac{1}{4}$较秦氏所设$\frac{5}{12}$为陡峭。观星台盘道左右对称，计北峻道双跑、东、西峻道各一、南峻道双跑峻道斜率均较秦题略陡。(图9)实物可征，愈见秦题非自虚构①。

3. 房　　屋

3.1 《数书九章》卷7第2题“临台测水”附建筑侧视图，在高三丈台基上建有单檐歇山殿堂，抟风板、垂鱼惹草图案赫然可见。直棂窗、栏杆、望柱、寻杖、地栿俱全。在台基上还可见角柱、角石、压栏石，砖则为顺砌。题文说：“台高三丈，其上址侧脚阔二尺”按《法式》卷15砖作制度垒阶基一节说：楼台亭榭，每砖一层，上收二分。”砖厚二寸五分，高三丈计砖120块，共收二尺四寸，与题文所说侧脚数字大体符合。题文说：“护下排沙石桩，去址一丈五尺“与《法式》卷3筑临水基所说：“每岸长五尺，打桩一条”可以互相印证。

3.2 卷12第2题积仓知数，卷14第2题砌砖计积两题列举

《数书九章》	宋尺		今存实	折合宋尺		建造
	间阔	进深		间阔	进深	年代
寺屋	12—13	25—30	登封初祖庵	12	33	1100
堂屋	17	30	杭州吴宅载德堂	12.5	37	明
后阁	10—15	13	大同善化寺普贤阁	11	10	1143
亭子	14	14	曲阜孔庙碑亭	15	15	金

① 郜成镇观星台实测数据及图均采自刘敦桢，刘公庙，《中国营造汇刊》卷6第4期，1937年。

寺屋、堂屋、书院、后阁(阁)、亭子，并附间阔、进深尺寸，对照同时期文物也大致相符。

4. 浮　　图

浮图为塔的别称。《数书九章》卷8第9题“表望浮图”为一测量题。本题插图为一七级六角(或八角)楼阁式塔。每级有栏杆平座、有出檐。攒尖顶，上有相轮，这是宋塔常见形式。从答案塔高11.7丈、相轮高3丈、塔身高8.7丈、塔心木(内3尺为剪截穿凿笋卯)9丈，可以画出剖视图(图10)。以塔心木(从平地起)为主要承重构件的塔，我国现已无实物，本题提供了难得的文献资料。

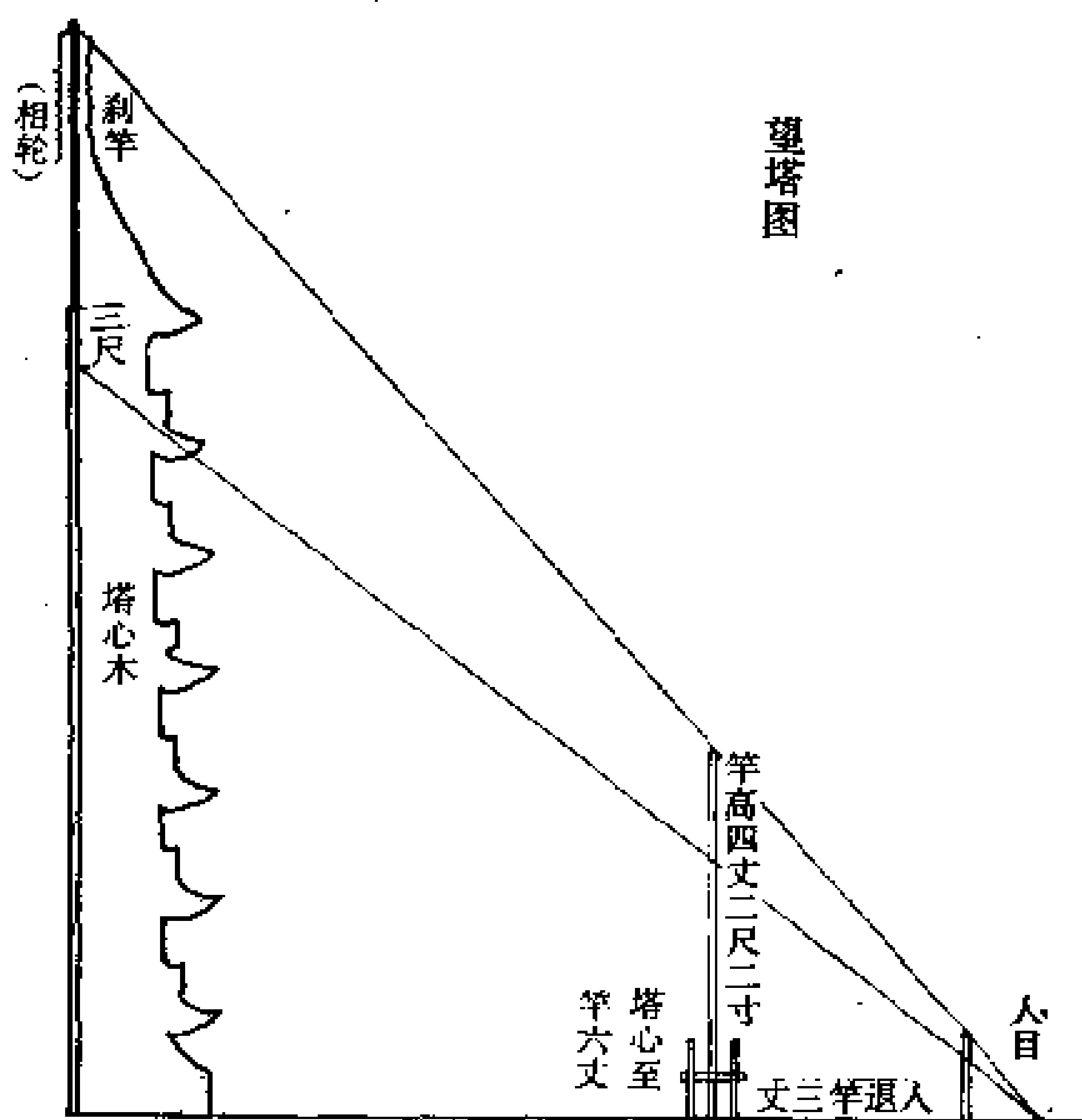


图10　望塔图　据宜稼堂本《数书九章》改绘

江苏苏州市瑞光塔始建于吴赤乌，后屡建屡毁。今塔主体结构系北宋宣和(1119—1125年)时物。塔心砖柱，而于第五层顶部开始用木构架，施对角木梁，在木梁中心立塔心木。心柱周围用额枋等横材穿插形成格网架。今塔相轮久已失去，所存复钵离地43.2米①，合宋尺13.5丈，较秦题七级塔高过半。(图11)

以塔心木为主要承重结构件古塔在日本较为普遍(图12)。例如日本推古天皇十五年(607年)所建仿华木构奈良法隆寺五重塔、

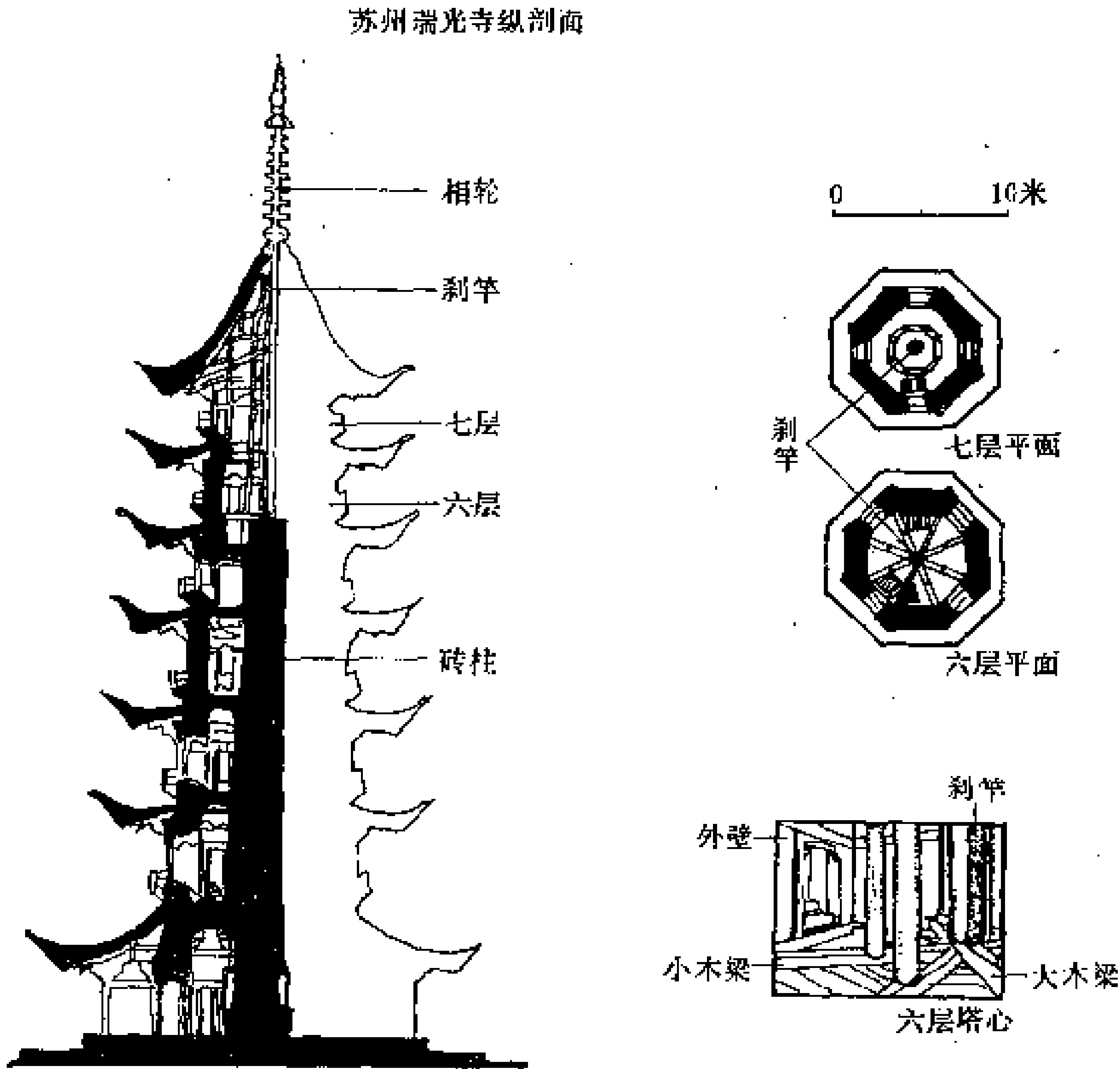


图 11

① 苏州市瑞光塔实测数据及图均采自张步骞，瑞光塔,《文物》，1965年第10期。

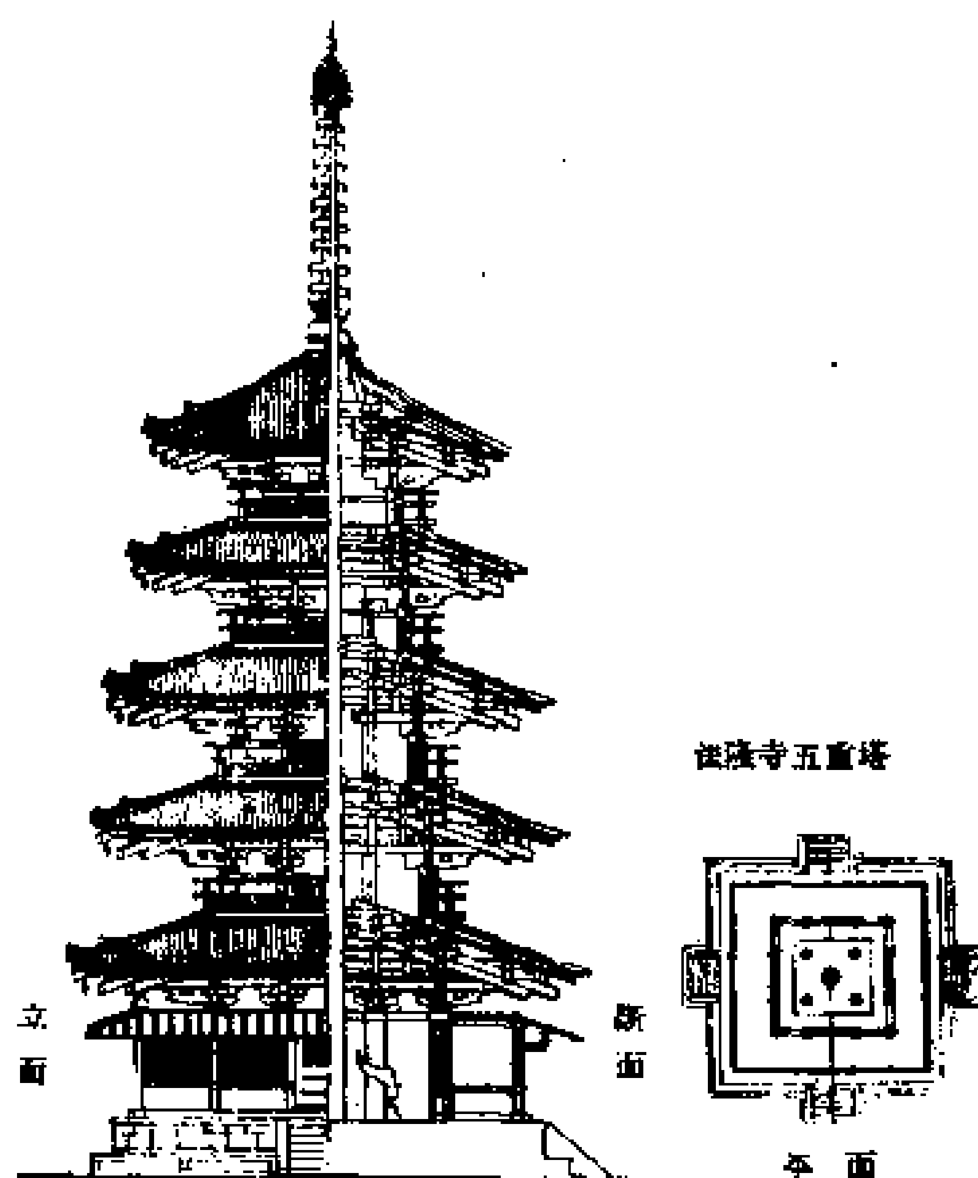


图12　日本五重塔

平面正方形，每级有栏杆、平座、有出檐，一如秦题插图。四拈尖顶。此塔高105.2日尺、相轮占塔高七之二，约50日尺，则塔心木约高75日尺①，合宋7.1丈，与秦题所记塔尺寸近似。"礼失而求之野"，借此可知秦氏浮图是有实据的。

5. 浮　　桥

我国文献最早提到的大型桥梁是《诗经·大雅》："亲迎于渭、造舟为梁。"说的是周文王为娶亲在渭河上架设浮桥故事，距今已三千多年了。《张邱建算经》卷上第31题："七百人造浮桥、九日成"，规模也不小。浮桥主要组成部分有五：船只、缆（用以系船）、

① 一日尺合0.303米。

桩(用以系缆)、锚(用以固定船只)和埠头。只要有上述现成设备，为达到某种要求，有时"竟夕可成"。《数书九章》卷7第3题"陡岸测水"就是为了"行师(出征)遇水，须计篾缆，搭造浮桥。"河(江)宽是建浮桥最重要数据，史载①公元十世纪初宋太祖帅师十万进军江南为建安徽当涂县采石矶浮桥"以小舫载綵绳其中，维南岸而疾棹北岸，以度江之广狭，凡数十往返而得其丈尺之数"，可见测量操作十分艰巨。秦题改用间接测量，算得河面宽23.46丈。秦九韶的同代人唐仲友于南宋淳熙七年(1180年)到浙江临海县做官，次年在灵江上造中津桥，并撰写"中津桥记"②说桥长"百十有五寻(8尺为寻，合92丈)为桥二十有五节，旁翼以柱，载以五十舟，舟置一碇(锚)……纽竹为缆，凡四十有二。……系缆以石狮十有一、石浮图二(作桩用)。"秦所命题水面视灵江为狭，而篾缆系舟唐文亦有所述。

6. 开河建坝

《缉古算经》第3至第5题讨论开河筑堤中的数学问题③。《数书九章》卷13第4题"计浚河渠"、开挖运河，就地筑堤，"面广六丈，底广四丈；上流深八尺，下流深一丈六尺，长四十八里。其堤下广二丈四尺、上广一丈八尺，长与河等。"如新开河河床为水平，则水面坡降为$0.8\div(48\times150)\doteq1:10000$，是很经济的水利设计。秦题所记水利工程较《缉古算经》所议开河一里二百七十六步规模要大多了。

坝是截水用水工建筑，《数书九章》卷13第3题"计造石坝"，全长30丈(合96米)，高4.2丈(合13.5米)，截面上底三丈、下底五丈(分别合9.6、16米)用块石$5\times2\times0.5$(单位尺)十万零八百片

① 《续资治通鉴》宋纪8。
② 民国《临海县志》卷2，1935年。
③ 沈康身，王孝通开河筑堤题分析，《杭州大学学报》，卷1第4期，1964年。

全石造。借此可见我国宋代水利建设一个侧面。

7. 围　　田

《数书九章》卷 6 第 3 题"围田先计"题文："问有草荡一所、广三里纵一百八十里。夏日水深二尺五寸与溪面等平。溪阔一十三丈、流长一百三十五里入湖。冬日水深一尺，欲趁此时围裹成田。"

"于荡田顺纵开大港一条，磬折通溪。顺广开小港二十四条，其深同。其小港阔比大港六分之一。大港深比大港面三分之一。大小港底各不及面一尺。"

"取土为埂高一丈、上广六尺、下广一丈二尺。荡纵当溪，其岸高、广倍其埂数。"

"上下流各立斗门一所，须令田内止容水八寸，遏余水复溪入湖。"

"里法三百六十步，步法五尺，欲知田积、埂土积、大小港底面深阔、冬夏积水、田港容水、遏水、溪面泛高各几何？"

围田或称圩田是江浙太湖地区农民重要治水造田经验之一。在秦九韶二百余年前北宋范仲淹《答手诏条陈十事》(1043年)说："江南旧有圩田，每一圩方数十里，如大城。中有河渠，外有门闸(按即斗门)。旱则开闸引江水之利，涝则闭闸拒江水之害，旱涝不及，为农美利。"

《宋史·河渠志》也记当时太湖区域大量发展围田，说："政和(1111—1118年)中太平州(今当涂县)围丹阳湖为田名政和圩，建康府围高淳县石血湖为永丰圩。"两圩规模宏大，永丰圩宽、广都达五、六十里，有田九百五十余顷。又说太平州修沿江田"自三百顷至万顷者凡九所，计四万二千余顷。"

生活在秦九韶略后的元代著名农学家王祯(约1300年时人)《农书》记："围田、筑土作围以绕田也。盖江淮之间地多薮泽，或

濒水不时淹没、妨于耕种。其有力之家、度视地形，筑土作堤，环而不断，内容顷亩千百，皆为稼地。……复有圩田，谓叠为圩岸，扞护外水与此相类，虽有水旱，皆可救御。凡一熟之余，不惟本境足食，又可赡及邻郡，实近古之上法，将来之永利。”

可见秦题所说围田，其水工建筑物(堤梗、斗门)其规模(所围面积达1866顷余)都能反映当时确况。秦题所设数据如田积水八寸、田梗截面收分三比十也是合理的。

从《数书九章》卷13第4题计浚河渠，同卷第3题计造石坝已见宋时水利规模。又卷4第5至第9题所说降水测量设备及计算可见当时水文工作已有一定水平。在提水工具方面，我国在东汉时已出现龙骨水车雏形，经逐代改进，到南宋时已见普及，宋人张孝祥(1132—1170年)在湖南写诗道：“象龙唤不应，竹龙起行雨，……转此大法轮，救汝旱岁苦……”就是描述这一灌溉方法的作用。所以从当时技术力量来看，秦题所记如此大面积排灌两用围田也是真实的。

当然由于缺乏水力学知识，秦氏在答案中说夏日围田排水后使溪水泛高一尺三寸，这显然是错误的。

8. 筑　　基

《数书九章》卷14第2题“堂皇程筑”记：“营造地基，长二十一丈、阔十七丈。先令七人筑坚(土)三丈，计功二日。令涓吉立木[①]有日，欲限三日筑了，每日合收杵手几何?”

题文是说限三日内要筑满堂红式地基21×17平方丈，先作一试验：7人二日内筑地基3平方丈。求要完成规定的工作量需多少人工。关于为夯实地基用杵手办法，《法式》卷3壕寨制度论筑基时说：“筑基之制每方一尺，用土二担。隔层用碎砖瓦及石札

① 旧时建房立排架要选黄道吉日。

等、亦二担。每次布土厚五寸，先打六杵(二人相对每窝子内各打三杵)次打四杵、次打两杵、次打两杵，以上并各打平土头。然后碎用杵辗蹑令平。每布土厚五寸、筑实厚三寸，每布碎砖瓦及石札等厚三寸筑实厚一寸五分。”从现存实物看山西芮城县元建筑永乐宫三座主要大殿(建成于1262年)于1960年迁移今址。当时曾对原址基础发掘，其做法与《法式》要求基本一致："黄土和碎砖瓦渣隔层夯筑，层厚多数土层9厘米约合三寸，砖瓦层厚5厘米约合二寸"①。

9. 建　材

古时建筑材料只是土、石、砖、木四种，金属材料仅用于少数小型铜件、铁件。

9.1　土　《九章算术》商功章为"以御工程积实"而作，其中主要论述与军事、水利工程有关的挖土、填土土方计算。规定按体积来说穿(挖)土四、折合填土：壤土(疏松耕种用土)五、坚土

种类(单位尺)	《法式》规格	《数书九章》	
		规格	所引题名
方砖	2×2×3 1.7×1.7×0.28 1.5×1.5×0.27 1.3×1.3×0.25 1.2×1.2×0.2	1.3×1.3 1.1×1.1	"积尺寻源"
条砖	1.3×0.65×0.2 1.2×0.6×0.2	1.2×0.6×0.25	"积尺寻源"、"计定城筑"，"楼橹功料"、"计作清台"
六门砖		1.0×0.5×0.2	"砌砖计程"

① 杜仙洲，永乐宫建筑，《文物》，1963年第8期。

四。我们已在本文第1节注中应用。

9.2　石　《法式》卷3石作制度所说土衬石尺寸是3×2×0.5(单位尺),《数书九章》有关各题所用石料规格是5×2×0.5(单位尺)视《法式》尺度较大。

9.3　砖　《法式》卷15砖作制度所列块砖标准对照《数书九章》有关各题用砖大致相符，列表如上页：

9.4　木　《数书九章》卷13、卷14营建类提到建筑木材多种，如果我们就卷13第1题"计定城筑"与《法式》卷3壕寨制度城建用材作一比较，二者所用名称、尺寸也大致符合。

"计定城筑"		壕寨制度	
材料名称	尺寸(单位尺)	材料名称	尺寸(单位尺)
永定柱	∅1.0长35	永定柱	∅1.0—1.2长30
爬头拽后木	∅0.7长20	夜叉木	∅1.0—1.2长26
抟子木	∅0.3长10	纴　木	∅0.5—0.7长10—12
纴　橛	∅0.1长1.0	木橛子	∅0.1长1.0

9.5　铁件　《数书九章》卷13第2题楼橹功料用钉对照《法式》卷28诸作用钉，能一一对应，列表如下：

楼橹功料	诸作用钉
一尺钉	葱台头钉长一尺
八寸钉	猴头钉长八寸
五寸钉	圜盖钉长五寸
四寸钉	葱台长钉长四寸

10. 功　限

在土木建筑施工中我国把一人一日工作量称为一功。由于各种因素一人一日工作量并非一成不变，我国自古以来合理地估测这种浮动规律。

10.1　季　节

《九章算术》商功章按四季不同规定挖土工每日工作量：

春程人功　766立方尺，

夏程人功　871立方尺，

秋程人功　300立方尺，

冬程人功　444立方尺。

《孙子算经》、《缉古算经》都有类似规定。反映唐代政治、经济实况的《唐六典》也记道："凡役有轻重、功有短长……以四月、五月、六月、七月为长功，二月、三月、八月、九月为中功，以十月、十一月、十二月、正月为短功。中功以十分为率，长功增一分，短功减二分。"原因是："夏至日长有至六十刻者，冬至有止于四十刻者，若一等之功则枉算日刻甚多。《法式》记功因袭《唐六典》。在《数书九章》有关算题也按季节论功，如卷13第4题"计浚河渠"中说："秋程人功其积60(立方)尺。

10.2　运输

《九章算术》商功章第21题记负土往来七十步，由于其中有二十步上下棚除(脚手架)二步作五步计、踟蹰(徘徊不前，行走不便)每十步加一步、载输之间(装卸)作三十步计，因此七十步作平地运输一百四十步计算。

《数书九章》卷13第4题有与商功章第21题类似问题，而卷14第1题"计作清台"，从平地某处运输到台顶一百六十步，其中四十步要上、下脚手架折算为平地步数就比较复杂。题文说："往来一百六十步，内四十步上下棚道。筑高至少半，其棚三当平道

五，至中半、三当七，至太半、二当五。踟蹰之间、十加一，载输之间二十步"。其中上脚手架四十步折算率分四段：

段	起讫高程（单位：尺）	升高（单位：尺）	折算为平地运输（单位：步）
1	$0-\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$
2	$\frac{40}{3}-20$	$\frac{20}{3}$	$\frac{20}{3}\times\frac{5}{3}=\frac{100}{9}$
3	$20-\frac{80}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{20}{3}\times\frac{7}{3}=\frac{140}{9}$
4	$\frac{80}{3}-40$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{200}{6}$

共$\frac{220}{3}$步

工种	《数书九章》	《法式》
木	永定柱串畜、栽埋合一功	散柱一条Φ1.1长15(单位尺)计一功
土	扭(运输)土 锹(挖)土六十尺计一功 杵(夯)手	诸殿阁廊基地开掘就土铺填打筑，六十尺计一功
石	石匠每砌九片(2×5×0.5单位尺)	踏道石每段(3×2×0.6单位尺)安砌工每段一功
砖	每砌七百片(1.2×0.6×0.25单位尺)计一功	垒墙墼①(1.2×0.66×0.2单位寸)每二百片一功

① 墼，音基，义砖坯。

而包括上脚手架40步在内的160步折算为平地运输应为

$$\left(120+\frac{220}{3}\right)\times(1+10\%)+20=232\frac{2}{3}(\text{步}).$$ [①]

10.3 工　种

《数书九章》有关算题所列不同工种每功工作量与《法式》规定举例比较如上页表。

① 原题答案误为 $200\frac{5}{18}$步，从宋景昌《札记》改正。

增乘开方法源流

沈 康 身

多项式方程的数值解法至秦九韶《数书九章》而大备，其历史发展渊源可以上溯到《九章算术·少广章》开方术和开立方术，所以阮元在《畴人传》卷22秦九韶传论云："读九韶书而后知昔人开方除法固有一以贯之者，留情九数之士所宜孰复而研究之也。"阮元认为秦九韶数值解方程与《九章算术》开方术在时间上虽相距千年以上，但却是一脉相承之作，这种看法是中肯的。数值解方程方法甚至还可以上溯到普通自然数筹算除法。

1. 除 法

《孙子算经》卷上说："凡除之法，与乘正异。乘得在中央，除得在上方。"举具体例子说："假令六为法，百为实。以六除百，当进之二等，令在正百下，以六除一，则法多而实少，不可除，故当退就十位。以法除实，言一六而折百为四十，故可除。"这里缩根(先"进之二等"，后"退就十位")、估根、减根(一六而折百为四十)，步骤很清楚。

2. 开平方和开立方

2.1 开平方

从《九章算术·少广章》开平方术文及刘徽注文我们可以复原筹算开方过程，例如第12题就是求

$$x^2=55225$$

正根的问题，我们可以列表说明这一过程：

程序	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
议		𝍡	𝍡	𝍡𝍫	𝍡	𝍡𝍫𝍤	𝍡𝍫𝍤
实	𝍤𝍭𝍡𝍪𝍤	𝍤𝍭𝍡𝍪𝍤	𝍠𝍭𝍡𝍪𝍤	𝍠𝍭𝍡𝍪𝍤	𝍪𝍢𝍪𝍤	𝍪𝍢𝍪𝍤	
(定)法			𝍣	𝍬	𝍬𝍥	𝍣𝍮	𝍣𝍮𝍤
借算	𝍠	𝍠	𝍠	𝍠	𝍠	𝍠	𝍠
对应方程	$x^2=55225$	$10000x_1^2=55225$	$10000y^2+40000y=15225$	$100y_1^2+4000y_1=15225$	$100z^2+4600z=2325$	$z_1^2+460z_1=2325$	$u^2+465u=0$

求得 $x=235$

从代数意义说①，开方术为获得二项二次方程根的每一个有效数字要经过三个步骤：

一、缩根(或扩根10的n次幂倍)变换

目的：便于估计方程的根。使方程的根变换成大于0而小于10的自然数。

手段：缩根变换时每缩小十倍、借算(x^2的系数)向左进二位，(定)法向左进一位。《九章算术·少广章》术文说："借一算步之，超一等"就是指此而言。上例程序①──→②，为使根缩小100倍，借算向左进四位。

扩根变换时，每扩大十倍、借算向右退二位，(定)法向右退一位。《孙子算经》卷中第19题，《张邱建算经》卷中第19题都是开平方题，后者在草文中说："方法一退，下法(借算)再退，"定位要求很明确。上例程序③──→④，⑤──→⑥都扩根10倍，都按规定布算。

二、估　根

① 源自出入相补原理，其几何意义参见吴文俊，"出入相补原理"，《九章算术与刘徽》，1982年，162—180页。

目的：经缩(扩)根变换后估计根的整数部分。

手段：《九章算术》术文说："议所得"，议就是商议：缩(扩)根变换后方程的根近似等于实除以定法。《孙子算经》卷中第19题当方程变换为 $x^2+968x=311$ 后就认为它的根就"等于"$\frac{311}{968}$，可见古人是认识到这一点的。上例②、④、⑥分别估得$[x_1]$，$[y_1]$，$[z_1]$为2、3、5。

三、减根变换

目的：为继续求得方程根的下一位有效数字。

手段：《九章算术》对此步骤语焉不详，《孙子算经》讲得就比较清楚，我们记缩根变换后方程所估计根的整数部分为 Y，那么经减根变换后的方程其系数可决定如下表：

系数	缩(扩)根变换后方程	减根变换后方程	《孙子算经》卷中第19题术文①
实	S	$S-(F+JY)Y$	方、廉各命上商以除实
定法	F	$F+2JY$	倍廉法上从方法②
借算	J	J	

上例②⟶③、④⟶⑤、⑥⟶⑦分别减根2、3、5。

2.2 开立方

我们也可以复原《九章算术·少广章》开立方术，例如19题是求 $x^3=1860867$ 的正根，这里也列表说明开立方过程：

和开平方一样，开立方时为获得三次方程根的每一个有效数字也必须历经三道步骤：

第一、二两步骤在《九章算术》特别是《张邱建算经》卷下第30题，刘孝孙细草讲得比较明确，刘孝孙称法为方法，中行为廉法，

① 《孙子算经》称 Y 为上商，F 为方法，JY 为廉法"各命上商"。命，有乘的意义，"以除实"，除，义：除去。

② 从，义：随从，转义：加。

程序	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
议 实 法 中行 借算	 𝍠𝍯𝍥 𝍧𝍮𝍦 𝍠	𝍠 𝍠𝍯𝍥 𝍧𝍮𝍦 𝍠	𝍠 𝍯𝍥 𝍧𝍮𝍦 𝍢 𝍢 𝍠	𝍠𝍪 𝍯𝍥 𝍧𝍮𝍦 𝍫 𝍢 𝍩	 𝍩𝍢𝍪𝍧𝍮𝍦 𝍬𝍢𝍪 𝍢𝍮 𝍩	𝍠𝍪 𝍩𝍢𝍪𝍧𝍮𝍦 𝍣𝍫𝍡 𝍢𝍮 𝍠	𝍠𝍪𝍢 𝍣𝍬𝍡𝍯𝍨 𝍢𝍮𝍢 𝍠
对应方程	$x^3 = 1860867$	$1000000x_1^3 = 1860867$	$1000000y^3 + 3000000y^2 + 3000000y = 860867$	$1000y_1^3 + 30000y_1^2 + 300000y_1 = 860867$	$1000z^3 + 36000z^2 + 432000z = 132867$	$z_1^3 + 360z_1^2 + 43200z_1 = 132867$	$u^3 + 363u^2 + 44289u = 0$

借算为下法(或隅)。讲到扩根变换时说："方法一退，廉法再退，下法三退"。在估计根值时，也用近似公式：实÷法，例如当方程变换为

$$u^3+348u^2+40368u=11968$$

后，他把方程的根取为

$$u\doteq\frac{11968}{40368}$$ ①。

第三道步骤即减根变换，在同一题中刘孝孙总结为：

系　　数	缩(扩)根变换后方程	减根变换后方程	《张邱建算经》卷下第30题刘孝孙细草
实	S	$S-(F+Y(Z+JY))Y$	以方、廉、隅三法皆命上商，除实讫
定法(方法)	F	$F+(2Z+3JY)Y$	倍廉法，三因隅法，皆从方法
中行(廉法)	Z	$Z+3JY$	三因次商加廉
借算(隅)	J	J	

3. 开带从平方

《九章算术·句股章》第20题提出形如

$$x^2+34x=71000$$

完全二次方程以及求这一方程正根的办法，术文是："开方除之。"赵爽《周髀算经·句股圆方图注》也有求形如

$$x^2+ax=b\quad(a>0,\ b>0)\qquad(*)$$

的二次方程正根问题。二书把 x 一次项系数都称为从法，常数项称为实。王孝通《缉古算经》所收有关三次方程都形如

① $u=0.2964724$，其中有三位有效数字。

$$x^3+ax^2+bx=c,\ (a>0,\ b>0,\ c>0)。$$

他把x^2的系数称为廉法，x的系数称为方法，常数项称为实，解方程求正根的方法也说是“开立方除之”。解方程所用术语与数的开方开立方相同，从此可以推测我国古代是用开平方、开立方工具来解上述形式的二次和三次方程的。

在我国数学发展史上首次具体地用开方办法来解方程(*)记载在杨辉《田亩比类乘除捷法》(1275)一书中，在此书序言中他提到中山刘益《议古根源》(12世纪)“撰成直田演段百问，信知田体变化无穷，引用带从开方正负损益之法，前古之所未闻也”。他引用的第1题是：“直田积八百六十四步，只云阔不及长一十二

開方列位圖
置積爲實別置一算名
隅從實尾超一位約實
至百數下定十步
商位置積方法從方隅算
商第一位數圖
上商置闕二十乘隅名算
於從方之上置二十名
曰方法以方數從數皆
商闕置積方法從方隅算
命上商除實六百四十
訖○上二因方法一退名
廉從法亦一退隅算二
退○又商置闕四步乘
商第二位數圖
隅於廉後置四名隅以
廉從隅三法皆命上商
四除實盡得闕二十四
步
商闕置積方法從方隅算

图 1

步，问阔几何？"从术文中附图带从开方步骤赫然可见(图1)。

我们设直田阔为x步，据题意可列出二次方程：

$$x(x+12)=x^2+12x=864$$

杨辉解题步骤照录如下：

按照筹算开方步骤此题解法应是

程　序	①	②	③	④	⑤	⑥
杨辉图式		开方列位图	商第一位数图			商第二位数图
议(商)		$Y=2$	20	20	20	24
实	$S=864$	864	864	$S-(F+JY)Y=224$	224	224
定法(从法)	$F=12$	120	$F+JY=320$	$F+2JY=520$	52	56
借算(隅)	$J=1$	100	100	100	1	1

从杨辉所列三个图式及说明可以窥见开带从平方和筹算开方三步骤是一致的。

从程序①到程序②，他解释说："置积为实，别置一算名隅，从实尾超一位……"。这就是缩根变换(10倍)。

"上商置阔二十"就是从方程估根$Y=2$。

从程序②到程序③，杨辉说："上商……乘隅算($J=100$即$YJ=200$)……名曰方法，以方数从数($(F+JY)Y=640$)……除实：($S-(F+JY)Y=864-640=224$)讫。"

从程序③到程序⑤，杨辉说："二因方法($2YJ=400$)，一退名廉(40)，从法亦一退(12)，隅算二退(1)。"

从程序⑤到程序⑥，杨辉说："又商置阔四步"这说明经扩根变换(10倍后)估根4。又说"乘隅(JY)，于廉后置四($F+JY=52+4=56$)……皆名上商($56\times4=224$)，除实($224-56\times4=0$)尽，得阔二十四步。"

4. 增乘开方法

贾宪《黄帝九章算法细草》(约1050)已失传，杨辉《详解九章算法》附纂类引用贾宪增乘开平方法和增乘〔开立〕方法，这是在先前筹算除法、开平方、开立方、开带从平方、开带从立方等算法基础上所改进的新方法，借此还可以开任意高次方，也可以数值解任意高次方程。

在杨辉所引贾宪增乘〔开立〕方法① 很具体、有规律、按步就班可以解题到所需精度，毋须硬记在筹算开立方中所规定的系数公式。

步骤一，估根："实上商(Y)置第一位得数"。

步骤二，减根："以上商乘下法(J)入廉，乘廉入方命上商，除实(S)讫。"成为新方程等号右端值；"复以上商乘下法入廉，乘廉入方"以为x的系数；"又乘下法入廉"作为x^2的系数，我们列为横式，这就是：

借算(下法)	中行(廉)	定法(方)	实
J	Z	F	S
	JY	$(Z+JY)Y$	$(F+(Z+JY)Y)Y$
J	$Z+JY$	$F+(Z+JY)Y$	$S-(F+(Z+JY)Y)Y$
	JY	$(Z+2JY)Y$	
J	$Z+2JY$		
	JY		
J	$Z+3JY$	$F+(2Z+3JY)Y$	$S-(F+(Z+JY)Y)Y$②

步骤三，扩根："其方一、廉二、下(法)三退"说明x、x^2、

---

① 按即今称数值解三次方程方法。

② 对照本文2.2节最后减根变换后系数公式表。

程序	杨辉原文	筹算式	代数意义
①	积一百三十三万六千三百三十六尺，问为三乘方几何？ 置积为实。别置一算名曰下法，于实末常超三位约实。	商 实　〡≡Ⅲ⊥Ⅲ≡T 立方 上廉 下廉 下法　〡	解　$x^4=1336336$ 对方程缩根变换，$x=10x_1$得 $10000x_1^4=1336336$① 对方程①减根变换：$y=x_1-[x_1]$，估计$[x_1]=3$得 ①10000　0　0　0　−1336336 | 3 　30000　90000　270000　810000 ②10000　30000　90000　270000　−526336 　30000　180000　810000 　10000　60000　270000　1080000 　30000　270000 　10000　90000　540000 　30000 ③10000　120000　540000　1080000　−526336
②	上商得数，乘下法生下廉，乘下廉生上廉，乘上廉生立方，命上商除实。	商　≡ 实　≣〡⊥Ⅲ≡T 立方　一Ⅲ 上廉　ⅢT 下廉　Ⅲ 下法　〡	
③	作法商第二位得数：以上商乘下法入下廉，乘下廉入上廉，乘上廉入方。 又乘下法入下廉，乘下廉入上廉。 又乘下法入下廉。	商　≡ 实　≣〡⊥Ⅲ≡T 立方　〡　ⅢT 上廉　≣Ⅲ 下廉　一〡 下法　〡	减根后方程为 $10000y^4+120000y^3+540000y^2+1080000y=526336$③

续表

程序	杨辉原文	筹算式	代数意义
④	方一、上廉二、下廉三、下法四退	商 34 实 526336 立方 108 上廉 54 下廉 12 下法 1	对方程③扩根变换：$10y=y_1$得 $y_1^4+120y_1^3+5400y_1^2+108000y_1=526336$ ④ 对方程④减根变换：$z=y-[y_1]$ 估计$[y_1]=4$ ④ 1 120 5400 108000 −526336 |4 4 496 23584 526336 ⑤ 1 124 5896 131584 0 $(z^3+124z^2+5896z+131584)(z-4)=0$
⑤	又于上商之次，续商置得数。以乘下法入(下)廉，乘下廉入上廉，乘上廉并为立方。命上商除实尽，得三乘方一面之数。	商 34 实 立方 131584 上廉 5896 下廉 124 下法 1	

x^3 的系数分别退一、二、三位，使方程的根扩大十倍。通过不断估、减、扩根三道手续，可以求根到所需精度。这种算法对于减根变换程序划一，比较代开立方系数公式要简便得多。我们还可以从杨辉所作递增三乘开方法术文①更具体地看到它的算法程序，在术文后我们补添筹算式及其代数意义。

5. 正负开方术

增乘开方这种算法不单限于开高次方，可用以数值解高次方程，而且各项系数不限于正数。

《隋书·律历志》说祖冲之"又设开差幂、开差立，兼以正圆参之，指要精密，算氏之最者也。"据钱宝琮考订认为圆是负字之误，并以为开差幂是开长阔有差的长方形面积，开差立是开长、阔、高有差的长方体体积，也就是说解系数可能出现负数的完全

程序	《议古根源》第18题杨辉细草	筹算式	代数意义
①	以上商四步，依三乘方乘下廉，入上廉共二百五十六。又以上商四步乘上廉，得一千二十四，为三乘方法……除尽，得矢四步。	商 𝍣 实 𝍬〇𝍱𝍥 方 上廉 𝍠𝍪𝍧 下廉 𝍭𝍡 负隅 𝍤	解 $-5x^4+52x^3+128x^2=4096$ 对方程减根变换 $y=x-4$ ① -5　52　128　0　-4096 | 4 　　-20　128　1024　4096 ② -5　32　256　1024　0
②		商 𝍣 实 𝍩　𝍪𝍣 方 𝍩　𝍪𝍣 上廉 𝍡𝍭𝍥 下廉 𝍫𝍡 负隅 𝍤	

① 《永乐大典》卷16343至卷16344辑有此题。

二次(三次)方程①。如果钱氏的假设是事实的话，那么大约在公元五世纪时我国已能解负系数方程。但是从现存数学文献来看，自《九章算术》迄宋以前，我国用筹算开方术来解的方程都限于非负系数，一直要到公元11世纪即杨辉所引刘益《议古根源》第2题、第4题②才有用增乘开方工具来解具有负系数方程的例子，其中第18题③尤其令人瞩目(图2)：

草曰倍田積自乘得四千九十六步爲實四因積
一百二十八爲上廉別四因徑步得五十二爲下
五筭爲負隅於實上商置得矢四步以命負隅五
廉二十餘三十二
上商矢 之積 三乘方法 上廉 下廉 負隅
上商命 二廉增 乘至此
爲法除
田畝比類乘除捷法卷下 大 宜稼堂
以上商四步依三乘方乘下廉入上廉共二百五
又以上商四步乘上廉得一千二十四爲三乘方
上商命方法除實盡得矢四步別置二因積六十
矢四步除得一十六減矢四步餘十二步爲弦合
圓田於內截弦矢田一段弦長十二步矢闊四步問
元徑幾步
答曰一十三步

用增乘开方法解带有负系数的多项式方程刘益称为开方正负损益之法。

秦九韶集前人数值解方程知识之大成，在所著《数书九章》八十一题中有二十多题用开方正负损益之法（秦简称正负开方法）求解。《数书九章》在有关各题术文后都附详细演草，显示我国古代数值解方程步骤确是秩序井然。秦九韶惯于对方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x=a_n$$

由低次幂系数从上而下依次写到高次幂系数，遇到 $a_i=0$，就记虚字；$a_i<0$在其绝对值旁记负字①；$a_i>0$ 在绝对值旁不记字。各项系数有专用名称：

$n=2$　　a_2实
　　　　a_1方
　　　　a_0隅

$n=3$　　a_3实
　　　　a_2方
　　　　a_1廉
　　　　a_0隅

$n=4$　　a_4实
　　　　a_3方
　　　　a_2上廉
　　　　a_1下廉
　　　　a_0隅

$n=10$　　a_{10}实
　　　　a_9方
　　　　a_8上廉
　　　　a_7次廉
　　　　a_6才廉
　　　　a_5维廉
　　　　a_4行廉
　　　　a_3交廉
　　　　a_2星廉
　　　　a_1下廉
　　　　a_0隅

《数书九章》卷 5 第 1 题“尖田求积”当列出相当于

$$-x^4+763200x^2-40642860000=0$$

的算筹表达式后，依次记录有筹算正负开方运算过程中二十一幅图式，我们改用阿拉伯数字并改用横式抄录其主要图式如下：

① $a_0<0$，即首项系数负时，绝对值旁记益隅。对于常数项，秦九韶认为“实常为负”相当于把a_n移到等号之左，但默认它是负数。

程序	隅	下廉	上廉	方	实	商
①	−1	0	763200	0	−40642560000	
②	−10000	0	76320000	0	−40642560000	
③	−100000000	0	7632000000	0	−40642560000	800
④	−100000000	−800000000	1232000000	9856000000	38205440000	
⑤	−100000000	−1600000000	−11568000000	−82688000000	38205440000	
⑥	−100000000	−2400000000	−30768000000	−82688000000	38205440000	
⑦	−100000000	−3200000000	−30768000000	−82688000000	38205440000	
⑧	−10000	−3200000	−307680000	−8268800000	38205440000	840
⑨	−10000	−3240000	−320640000	−9551360000	0	

注意，程序①至③为缩根变换，其中①至②缩小10倍，原题草文说："上廉超一位，益隅超三位"。②至③又缩小10倍，草文："上廉再超一位，益隅再超三位"。

程序③中估计缩根变换后方程的根有首位数字"8"。

程序④至⑦是正负开三乘方减根变换算法过程，其中程序④解决减根变换后的常数项，草文：

"以商生隅，入益下廉"

$(8\times-100000000=-800000000)$

"以商生下廉，消从上廉"

$(8\times-800000000+7632000000=1232000000)$

"以商生上廉入方"

$(8\times1232000000+0=9856000000)$

"以商生方得正积，乃与实相消"

$(8\times9856000000-40642560000=38205440000)$

程序⑤求x一次项系数——方为-82688000000，程序⑥、⑦分别求x二次项，三次项系数——上廉、下廉分别为-30768000000，-3200000000。

程序⑧是扩根变换，草文："方一退，上廉二退，下廉三退，隅四退。"扩根变换后，就接着估根，草文说："以方约实，续商置四十"（实÷方$=38205440000\div8268800000\doteq4$）

程序⑨减根(4)后常数项为0。

秦九韶还继承刘徽在《九章算术·少广章》第12题开平方注中求其微数的办法，运用于正负开方法，使所求根到需要的精度。《数书九章》卷12第1题"囤积量谷"当列出

$$16x^2+192x-1863.2=0$$

的算筹图式后，就用正负开方法作减根6变换，得新方程

$$16y^2+384y-135.2=0。$$

接着就估计方程$f(y)=0$根的首位数字是0.3，作减根0.3运算，得新方程

$$16z^2+393.6z-18.56=0$$

对$f(z)=0$继续估得首位数字为0.05，减根后方程成为

$$16u^2+395.2u+1.16=0。$$

于是原方程$f(x)=0$的根近似等于6.35。

在方程变换中系数绝对值增大或减小(秦称为投胎)，符号从负变正(秦称为换骨)都视为正常现象，使后学者在使用这一工具时有恃无恐，游刃有余。

秦九韶的同代人、生活在北方的数学家李冶也精于正负开方术，在此术中他进一步获得自由，对秦九韶的"实常为负"的规定也有所突破。例如在《测圆海镜》卷4第5题就相当于解方程$x^3-140x^2+900x+180000=0$，经过减根变换后，新方程"换骨"为$y^3+160y^2+2900y-13000=0$。至此我国数学界对任意次多项式方程(带有各种不同情况系数)的正根数值解问题已全部解决。

6. 中世纪中亚和西欧

伊斯兰学者阿尔·那萨维(Al-Nasawi)《算书》(1030)在求

$$x^3=3652296$$

的正根时，已使用相当于我国增乘开方法①。阿部瓦发(Abul-Wafa，940-997)已解高至七次开方题，奥玛尔·海牙姆(Omar Khayyam，1044-1123?)也做过高次开方题②，特别是撒马尔罕数学家阿尔·喀西(Al Kashi,?-1436)在《算术钥》卷1第5章中系统介绍开任意次方的方法，是中世纪伊斯兰民族有关数学文献中最为完整之作，与我国增乘开方法相比，从开始到开方不尽求其微数为止，运算程序几乎完全相同③。

---

① Б. А. Розонфельд, "Докозательствах Задач Алгебры и Алмукабалы," 《Историко-Мате. Исследования》, 卷4, 1952.

② G. Sarton, 《Introduction to the History of Science》 Vol 1, 1927.

③ 杜石然，"试论宋元时期中国和伊斯兰国家间的数学交流，《宋元数学史论文集》，1966年，241—264页。

意大利比萨著名数学家斐波那契（Leonardo Fibonacci, 13世纪）生活年代较我贾宪、刘益为后，当神圣罗马帝国皇帝腓力特烈二世御前数学考试，他解得三次方程

$$x^3+2x^2+10x=20$$

正确到(60进制)小数点后六位数字，人们不知道他用的是什么方法。两卷本《数学史》作者史密斯[①]说："没有人知道这个结果是怎样获得的，但是这类数字方程当时在中国已解决，并且当时东西方已有交往，从这些事实人们相信是斐波那契在旅游中学到的解法。"比利时学者李倍始说[②]："如果斐波那契知道增乘开方法的话，那么非常可能他是从伊斯兰数学家那里学来的，而后者师承先行者——中国学者。"

7. 日　　本

我国传统数学于公元六世纪起经朝鲜东传日本，在天文历算上对日本有深刻影响。记有正负开方法的《杨辉算法》"田亩比类乘除捷法"(引有刘益《议古根源》算题)和介绍列多项式方程方法——天元术的朱世杰《算学启蒙》(1299)均于江户时代(1603—1867)传入日本。从当时日本出版的数学书上所刊载的算盘图(图3)可见他们对多项式方程各次幂系数的名称：商、实、方、初廉、次廉、三廉、四廉、隅与中算一致。

和算之圣关孝和(1642？—1708)丰硕著作中有关多项式方程的工作足为和算代表，所著《开方算法》一书记正负开方最详细，值得注意的是：

7.1　课　商　关氏解释说："课商、考商位也。凡量最初之商者，有难考得适数于一般，故或先起于一个数……，而窥其位。……实余则商不及，故逐增其数。若误而商太过，则诸级反复，

---

① D. E. Smith, 《History of Mathematics》 Vol. 2, 1925, p. 472.

② U. Libbrecht, 《Chinese Mathematics in 13th Century》1973, p. 205.

算盤圖

左 首也 上也　　　　右 尾也 下也

十	萬	千	百	十	一	分	釐	毫	絲	忽
					商					
					實					
					方					
					初廉					
					次廉					
					三廉					
					四廉					
					隅					

图 3

而难得同名之后商。故立异名商开之。……而后并所立之同名商，又并异名商，而相减。余为定商。”这里所说“课”，有试测的意思。从方程常数项变化(正、负)来调整试测的商(根)是太大，还是太小：“实余则商不及”“若误而商太过。”“同名”、“异名”义自《九章算术》方程术，指前后所试测的商是同号数还是异号数。我们录课商术一例，并作解释。(见下页表)

7.2 穷　商　是秦九韶《数书九章》卷12第1题“囤积量谷”求微数法，《张邱建算经》卷下第30题求近似根相类方法、关孝和解释穷商法说：“穷商，此究商数畸零之微也。开实数有不尽者，随开出位数，以方除实(自注：乃同名除者，定得负数，异名除者，定得正数也。)以其数依正负加减于开商为次商，以之自原式

《开方算法》术文	代数意义

《开方算法》术文：

假如立方

𝍤𝍯𝍧𝍮𝍣〇𝍥𝍪𝍤

𝍠𝍱𝍡𝍩𝍧𝍯𝍤̸

𝍪𝍡𝍯𝍤

𝍠̸

先量初商、正五，自隅至上，命之除实。逐下命之，至廉加减，而得：

𝍮𝍠𝍬𝍤𝍫𝍠𝍪𝍤

𝍫𝍨𝍮𝍧𝍯𝍤̸

𝍦𝍯𝍤

𝍠̸

是初商数少，而实余。

代数意义：

解三次方程

$$-x^3+22.75x^2-192.1875x+578.640625=0$$

假设根$x_1=5$，作减根变换

$$y=x-5$$

-1	22.75	-192.1875	578.640625	$\lfloor 5$
	-5	88.75	-517.1875	
-1	17.75	-103.4375	61.453125	
	-5	63.75		
-1	12.75	-39.6875		
	-5			
-1	7.75	-39.6875	61.453125	

得新方程

$$-y^3+7.75y^2-39.6875y+61.453125=0$$

由于减根$x_1=5$太小，使常数项仍是正数。

《开方算法》术文：

故又立后商正五，开之，如前命加减之，得

𝍮𝍧𝍪𝍢𝍬𝍢𝍯𝍤̸

𝍫𝍦𝍩𝍧𝍯𝍤̸

𝍦𝍪𝍤̸

𝍠̸

后商太过，而诸级皆变为负，难得正商。

代数意义：

再减根$y_1=5$，作减根变换 $z=y-5$

-1	7.75	-39.6875	61.453125
	-5	13.75	-129.6875
-1	2.75	-25.9375	-68.234375
	-5	-11.25	
-1	2.25	-37.1875	
	-5		
-1	-7.25	-37.1875	-68.234375

由于减根 $y_1=5$ 太大，使方程各项系数都变成负数：

$$-z^3-7.25z^2-37.1875z-68.234375=0$$

《开方算法》术文	代数意义
故反立负商一、开之得 𝍫𝍦𝍩𝍨𝍮𝍧𝍯𝍤 𝍩𝍤𝍮𝍧𝍯𝍤 𝍣𝍩𝍤 𝍠	加根$z_1=1$，$u=z+1$，方程变换为 $-u^3-4.25u^2-25.6875u-37.296875=0$
此负数未及，而式中又难得正商，故再立负商二，如前开之，得 𝍤〇𝍦𝍰𝍠𝍩𝍤 𝍩〇𝍮𝍧𝍯𝍤 𝍠𝍯𝍤 𝍠 于是，诸级正负悉复于旧。	由于加根不够方程各项系数还是负数，因此再加根 $u_1=2$，$v=u+2$，方程变换为 $-v^3+1.75v^2-20.6875v+5.078125=0$
视次位二分，即为次正商。以之命加减，而开之得 𝍠〇〇𝍩𝍥𝍩𝍤 𝍩〇𝍩〇𝍯𝍤 𝍠𝍩𝍤 𝍠	估计根的十分位数是2，做综合除法，设 $t=v-0.2$ $\begin{array}{rrrr\|l} -1 & 1.75 & -20.6875 & 5.078125 & 0.2 \\ & -0.2 & 0.31 & -4.0655 & \\ \hline -1 & 1.55 & -20.3775 & 1.002625 & \\ & -0.2 & 0.27 & & \\ \hline -1 & 1.35 & -20.1075 & & \\ & -0.2 & & & \\ \hline -1 & 1.15 & -20.1075 & 1.002625 & \end{array}$

《开方算法》术文	代数意义
视次位五厘，即为三商。如前开之，实级尽。 故所立之正商四数相并共得正一十个，二分五厘，又负商二数相并共得负三个，相减，余正七个二分五厘为定商也。	从上面方程 $-t^3+1.15t^2-20.1075t+1.002625=0$ 再减根 $s=t-0.05$，常数项近似等于零 于是原方程的根是 $+5+5+0.2+0.05-$ $-1-2=7.25$

隅，命之，至实加减之，亦自隅至方加减之，以其方随次商位数除其实，以得数加减于次商，为三商。次第如此，得各级定商也。"

这就是说，方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

经过减根变换$y=x-x_1$，方程变形为

$$b_0y^n+b_1y^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}y+b_n=0$$

后，那末

$$y\doteq-\frac{b_n}{b_{n-1}}$$

我们录穷商术一例，并作解释。(见下页表)

我们又录另一例，说明关孝和用正负开方法求方程的负根。

关孝和的工作有如下值得注意的地方：

一、课商术在估根方面是一良好工具，加根法正可以补充减根法。

二、在课商术和穷商术中都没有用到扩根、缩根变换，因此在商中出现小数。

三、用正负开方法可以求方程负根，在方程论上是一创见。

四、穷商术兼具我国张、秦优点，同时可求得好几位有效数字。

《开方算法》术文	代数意义
假如立方 先立正商一个，开之得	解三次方程 $x^3+2x^2+3x-9=0$ 假设根$x_1=1$，作减根变换 $y=x-1$ $\begin{array}{rrrr|l} 1 & 2 & 3 & -9 & \underline{1} \\ & 1 & 3 & 6 & \\ \hline 1 & 3 & 6 & -3 & \\ & 1 & 4 & & \\ \hline 1 & 4 & 10 & & \\ & 1 & & & \\ \hline 1 & 5 & 10 & -3 & \end{array}$ 得新方程　$y^3+5y^2+10y-3=0$
又立正商二分，开之得	再减根　$y_1=0.2$，作变换　$z=y-0.2$，得新方程 $z^3+5.6z^2+12.12z-0.792=0$

《开方算法》术文	代数意义
复立正商六厘，开之得 [illegible]	再减根 $z_1=0.06$，作变换 $u=z-0.06$，得新方程 $$u^3+5.78u^2+12.8028u-0.044424=0$$
如此有不尽，故随开商位数以方正一十二个八〇二八除实负四厘四四二四，得正三毫四六，并开商得正一个二分六三四六为次商。	$$u\doteq-\frac{-0.44424}{12.8028}=+0.00346=u_1$$ $$x\doteq x_1+y_1+z_1+u\doteq1.26346$$
即如原式隅，命之，至实相减，余负五忽七〇七四七三〇二六四。 又命于隅，至方相加，得正一十二个八四二八三三五一四八，以之除实负五忽七〇七四七三〇二六四，[1]得正四微四四四〇九，并次商，得正一个二分六三四六四四四〇九，为三商，逐如此，究其微也。	以近似根 $u=0.00346$ 对原 u 三次方程做变换 $v=u-0.00346$ 得 1 5.78 12.8028 −0.044424 |0.00346 0.00346 0.0200107716 0.044366925269736 1 5.78346 12.8228107716 −0.000057074730264 0.00346 0.0200227432 1 5.78692 12.8428335148 $$v\doteq\frac{-0.000057074730264}{12.8428335148}=0.00000444400=v_1$$ $$x\doteq x_1+y_1+z_1+u_1+v_1=1.26346444409$$

① 关孝和误为负五忽，应是负六忽。

《开方算法》术文	代数意义
假如平方 𝍩𝍠 𝍧 𝍠	解方程 $x^2+8x+11=0$
先立负商一个，开之得 𝍣 𝍥 𝍠（负）	加根 1，得 $\begin{array}{rrr} 1 & 8 & 11 \\ & -1 & -7 \\ \hline 1 & 7 & 4 \\ & -1 & \\ \hline 1 & 6 & 4 \end{array} \Big\lfloor -1$
次立负商七分，开之得 〇𝍪𝍨 𝍣𝍮 𝍠	加根0.7，得 $\begin{array}{rrr} 1 & 6 & 4 \\ & -0.7 & -3.71 \\ \hline 1 & 5.3 & 0.29 \\ & -0.7 & \\ \hline 1 & 4.6 & 0.29 \end{array} \Big\lfloor -0.7$
如此有不尽得负六厘三毫，并开商得负一个七分六三为次商，即自原式廉，命之至实相减，余正四毫一六九，又以次商命廉，至方相减，余正四个四七四，以之随次商位数除实正四毫一六九，得负九丝三一八。并次商得负一个七分六三九三一八为三商。	定方程 $x^2+4.6x+0.29=0$的根近似等于 $-\dfrac{0.29}{4.6}=-0.063$ 原方程的根当是 $x\doteq-1.763$ 从方程 $x^2+4.6x+0.29=0$加根0.063 $\begin{array}{rrr} 1 & 4.6 & 0.29 \\ & -0.063 & -0.285831 \\ \hline 1 & 4.537 & 0.004169 \\ & -0.063 & \\ \hline 1 & 4.474 & 0.004169 \end{array} \Big\lfloor -0.063$ 定方程 $x^2+4.474x+0.004169=0$的根 近似等于 $-\dfrac{0.004169}{4.474}\doteq-0.0009318$ 原方程的根当是 $x\doteq-1.7639318$

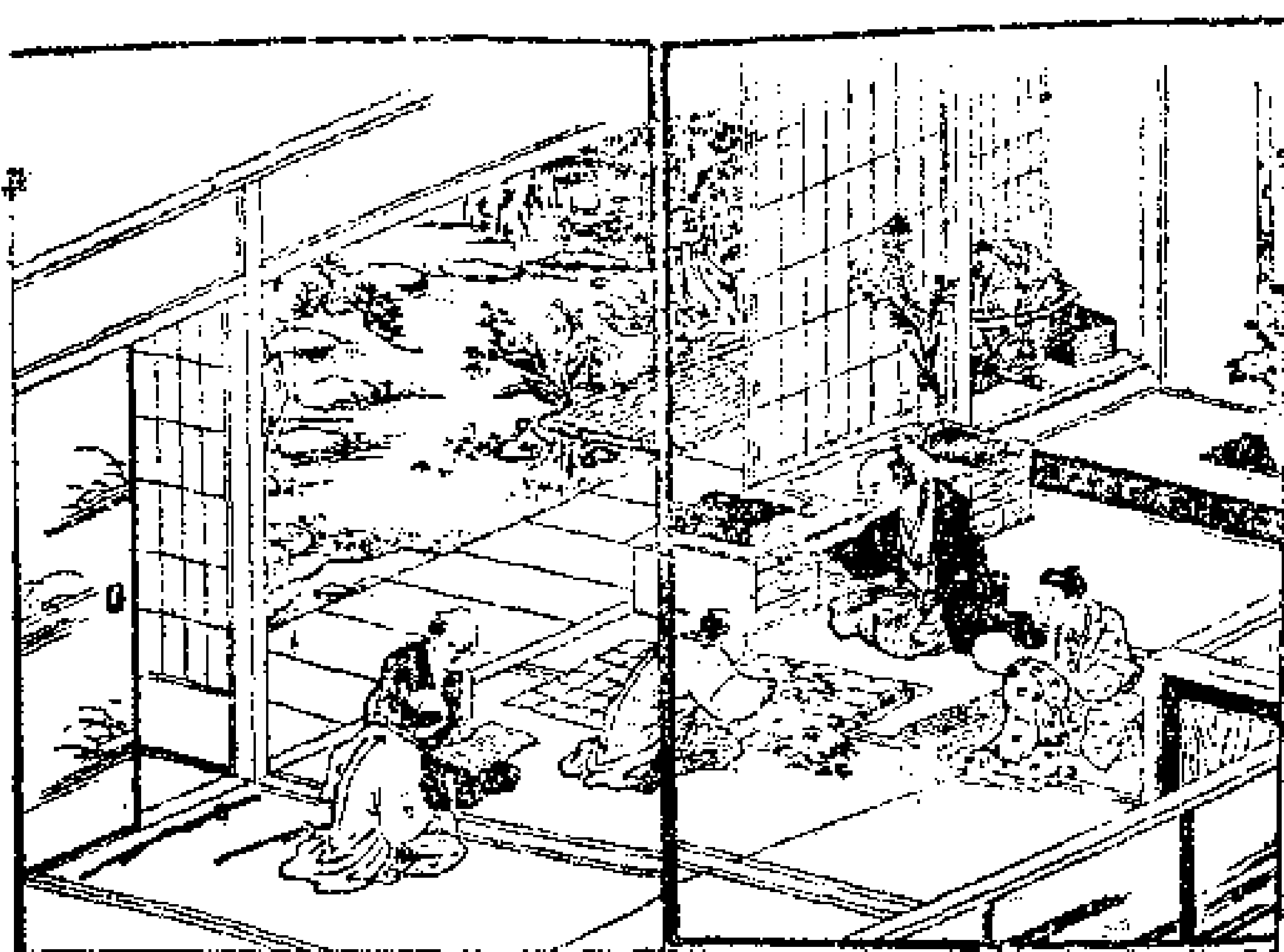


图4　日本正负开方写生图(三宅贤隆1795年绘)

五、关孝和熟练掌握天元术，对有关问题立出天元式后就用正负开方术解题。在方程次数上，在所求根的精度上较中算为胜。例如《大成算经续录·勿惮改答求》第89问说：“今有借金一千两，只云每年三百两，五年还讫本利一千五百两。别今以此利每年三百两，欲四年还讫，本利一千二百两，问今借元金几何？答：今借元金八百五十二两三百二三七一强。”术文：“设天元一为今借元金。”关孝和从题文如积相消立出天元式。如设今借元金为x两，所立天元式相当于方程：

$$344331\times10^{19}x^5+447849\times10^{16}x^4+37422\times10^{14}x^3-1944\times10^{12}x^2-972\times10^{10}x-81\times10^{8}=0.$$

关孝和“四乘方翻法开之，得今借元金，合问。”①又如《括要算法》卷3讨论正n边形已知边长为1，求内切圆半径r_n，外接圆半径

① 我们验算：设年利率为x，按题意先立出五年还清，借一千两这笔帐的方程是：
$((((1000(1+x)-300)(1+x)-300)(1+x)-300)(1+x)-300)(1+x)-300=0$，得$x\doteq0.1525$．然后用同一年利率别设借$y$两每年还三百两，四年还清，立出$y$的四次方程，关孝和所求结果正确无误。

R_n，其中 $n=3, 4, \cdots\cdots, 20$。关孝和从几何关系把所求件作为天元一，一一列出天元式，然后用正负开方法熟练解题，方程次数有高达十八次者。例如$n=19$，他立出的天元式相当于：

$$19R_{19}^{18}-285R_{19}^{16}+1254R_{19}^{14}-2508R_{19}^{12}+2717R_{19}^{10}-1729R_{19}^{8}$$
$$+665R_{19}^{6}-152R_{19}^{4}+19R_{19}^{2}-1=0,$$
$$4980736r_{19}^{18}-63504385r_{19}^{16}+190413152r_{19}^{14}-206389248r_{19}^{12}$$
$$+94595072r_{19}^{10}-19348992r_{19}^{8}+1736448r_{19}^{6}-62016r_{19}^{4}$$
$$+684r_{19}^{2}-1=0.$$

他用"一十七乘方翻法开之，……，合问"。原书答案是

$$R_{19}=3.03776691,$$
$$r_{19}=0.2996335729.$$①

8. 19世纪欧洲

意大利学者鲁斐尼(P. Ruffini, 1765—1822) 于 1804 年发明逐步逼近法解数字系数高次方程，不久英国中学教师霍纳(W. G. Horner, 1789—1837)也于1819年发表论文"连续近似解任何次数字方程的新方法"在伦敦皇家学会宣读，并在当年学会会刊发表②。

在论文中他把解代数方程算术化：

一、一次方程　$\Delta=az$，如果z是多位数，记$z=r+r'+r''+\cdots\cdots$，那么照图示除法就可得解：

$a \qquad \Delta(r+r'+\cdots\cdots$

---

① 我们验算：

$$R_{19}=\frac{1}{2}\csc\frac{360^\circ}{38}=3.0377669,$$

$$r_{19}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{360^\circ}{38}=0.29963356.$$

② W. G. Horner, "A new method of solving numerical equations of all orders, by continuous approximation", 《Philosophical Transactions of the Royal Society of London》1819, pp.308—335。

$$\frac{-ar}{\Delta'}$$

$$\frac{-ar'}{\Delta''}$$

$$\frac{-ar''}{\Delta'''}$$

等等。

二、二次方程 $\Delta = az + z^2$，照以下图示除法（综合除法）可得解：

$$
\begin{array}{lll}
1 & a & \Delta(r + r' + \cdots\cdots \\
 & \underline{r} & \underline{-Ar} \\
 & A & \Delta' \\
 & r & \underline{-A'r'} \\
 & & \Delta'' \\
 & \dfrac{r'}{A'} & 等等 \\
 & 等等 &
\end{array}
$$

三、三次方程 $\Delta = az + bz^2 + z^3$ 的解可照下列图示除法（综合除法）：

$$
\begin{array}{llll}
1 & b & a & \Delta(r + r' + \cdots\cdots \\
 & \underline{r} & \underline{Br = {}_0B} & \underline{-Ar} \\
 & B & A & \Delta' \\
 & 2r & {}_0B + r^2 = {}_1B & \underline{-A'r'} \\
 & & & \Delta'' \\
 & \dfrac{r'}{B'} & \dfrac{B'r'}{A'} & 等等 \\
 & 等等 & 等等 &
\end{array}
$$

事实上霍纳论文中所述数值解（代数方程算术化）步骤与我国自

《九章算术》以来所用有关方法是一致的。

在论文中他举了六个例子，前面五例是多项式方程：

例1　求48228544的立方根。

the known arithmetical process for extracting the square root.

3. At *Cubic equations*, the aberration of the old practice of evolution commences, and our theorem places us at once on new ground. We have here

$$\Delta = ax + bx^2 + x^3$$

and must proceed thus:

$$\begin{array}{cccc} 1 & b & a & \Delta(r+r+\ldots\ldots \\ & \underline{r} & br = {}_0B & \underline{-Ar} \\ & \underline{B} & \underline{A} & \underline{\Delta'} \\ & 2r & {}_0B + r^2 = {}_1B & \underline{-A'r'} \\ & \underline{r'} & \underline{B'r'} & \underline{\Delta''} \\ & \underline{B'} & \underline{A'} & \&c. \\ & \&c. & \&c. & \end{array}$$

This *ought to be* the arithmetical practice of the cube root, as an example will prove.

Ex. 1. *Extract the cube root of* 48228544.

Having distributed the number into tridigital periods as usual, we immediately perceive that the first figure of the root is $3 = R$. Consequently, the first subtrahend is $R^3 = 27$, the first derivee $3R^2 = 27$, the second $3R = 9$; the third (=1,) need not be written. Hence

$$\begin{array}{ccc} & & 48228544(364 \\ 9.. & 27.. & 27 \\ \underline{6} & \underline{576} & \overline{21228} \\ 96. & 3276 & \underline{19656} \\ 12. & 612.. & 1572544 \\ \underline{4} & \underline{4336} & \underline{1572544} \\ 1084 & 393136 & \end{array}$$

In this example the reader will perceive that no supplementary operations are concealed. The work before him is complete, and may be verified mentally. I need not intimate

图　5

例2　解　$x^3-2x=5$。

例3　验证例 2 方程的正根到十位小数。

例4　解　$x^3-7x=-7$。

例5　解　$x^5+x^4+3x^3+4x^2-5x=321$。

例 1 解题过程见图5。我们介绍其第 2 题的算法程序：

①　估根　估计例 2 方程的根比 2 略大。

②　减根　设$x=2+z$，得减根后方程为

$$1=10z+6z^2+z^3$$

③　估根　估计$z=0.1$，于是

$$1=10z+6z^2+z^3\doteq 10z+6z^2$$

$$=10z+0.6z=10.6z,$$

$$z\doteq\frac{10}{106}\doteq 0.094$$

④　减根，霍纳算法照录如下：

```
6···                10···                1.000000000(.094
 094            ┌----572836          ┌---993846584
6094×94=-------┘   10572836 --------┘     6153416
 188                 581672
                       3
```

减根后方程变换为

$$u^3+6.282u^2+11.157508u=0.006153416。$$

⑤　估根　u为一较小数

$u\doteq 0.006153416/11.158=0.00055148$。

⑥　减根，霍纳原来算法我们照录如下：

```
                6094
                 18855148
                628255148  ×5·····
                   110296

  10572836
   581672
=······34647014901904           6153416
   111579727014901904    ······615339878541781019
        34650056                  1721458218981
            1
```

从此又得方程　$6.2836543v^2+11.16143772v$

$=0.0000000172145821898l$

⑦　估根　$v \doteq 0.000000017214582189 81/11.16143772$

$\doteq 0.0000000154232659 0$。

因此例2原方程的根是

$x \doteq 2.09455148154232659 0$。

查1801—1830年间英国皇家学会会刊刊登数学论文共44篇，其中有新见的为三十余篇，约平均每年一篇，其中拜贝奇(A. Babbage)、武德豪斯(R. Woodhouse)、爱伏里(J. Ivory)等人的工作有较高水平，但真正经受历史考验而流传后世的成果只能推上述霍纳数值解方程一文①。与我国具有上千年历史的数值解方程已有水平相比较，霍纳的论文有以下值得注意的地方：

一、无扩(缩)根步骤。

二、估根，如程序③、⑤、⑦与我《九章算术》开平方术以来，特别是《张邱建算经》卷下第30题，传统方法同术。

三、减根，如程序②、④、⑥同时用以求得根的好几个有效数字，这实际上与兼具我国秦、张优点的关孝和穷商术同术。

四、算法程序以及数据处理较紊乱，与秦九韶算法井然有序者大不一样。

---

① 李文林，"剑桥分析学派"，中国科学技术史年会论文，1983年。

秦九韶方变锐阵题解法改正

李　兆　华

秦九韶《数书九章》(1247)卷十五的方变锐阵题解法有误，虽经四库馆臣指出而更正仍属不实[1]，其它数学史著作亦未涉及此点[2]-[6]。本文指出该题解法不能成立之原因并予更正。

先录原题如下：

问步兵五年，年一万二千五百人。作方阵，人立地方八尺。欲变为前后锐阵，阵后阔今多原方面半倍，阵间仍容骑路五丈以上，顺锐形出入。求方阵面，锐阵长，及前后锐阵各布兵几何？

答曰：方面二百丈，方面布兵二百五十人。

锐后广三百丈，锐广列兵三百六十二人。

锐通正长三百丈，骑路两条各阔五丈二尺。

内锐阵广一百四十五丈六尺，列一百八十二人，长一百四十五丈六尺。计布兵一万六千六百五十三人。

外锐两广各七十二丈，列九十人，计布兵四万五千八百四十七人。

本题是要把一个有 12500 人的正方形阵变为一个如图 1 的正三角形ABC的形状，但其中必须空出一个折形 $B'B''A'A''C'C''$ 的骑路，其夹角亦为60°。相邻两人间距仍为 8 尺不变。秦氏给出，$BB'+C'C$上共列180人，$B'B''+C''C'$ 上相当于列 13人，$B''C''$上列182人。因而BC上可列375人。

秦氏的解法是，先假定骑路宽$B'B''=C''C'=5$丈，由$BC=300$丈减去 2 倍的骑路宽为290丈，以人间距 8 尺除之，得阵后广

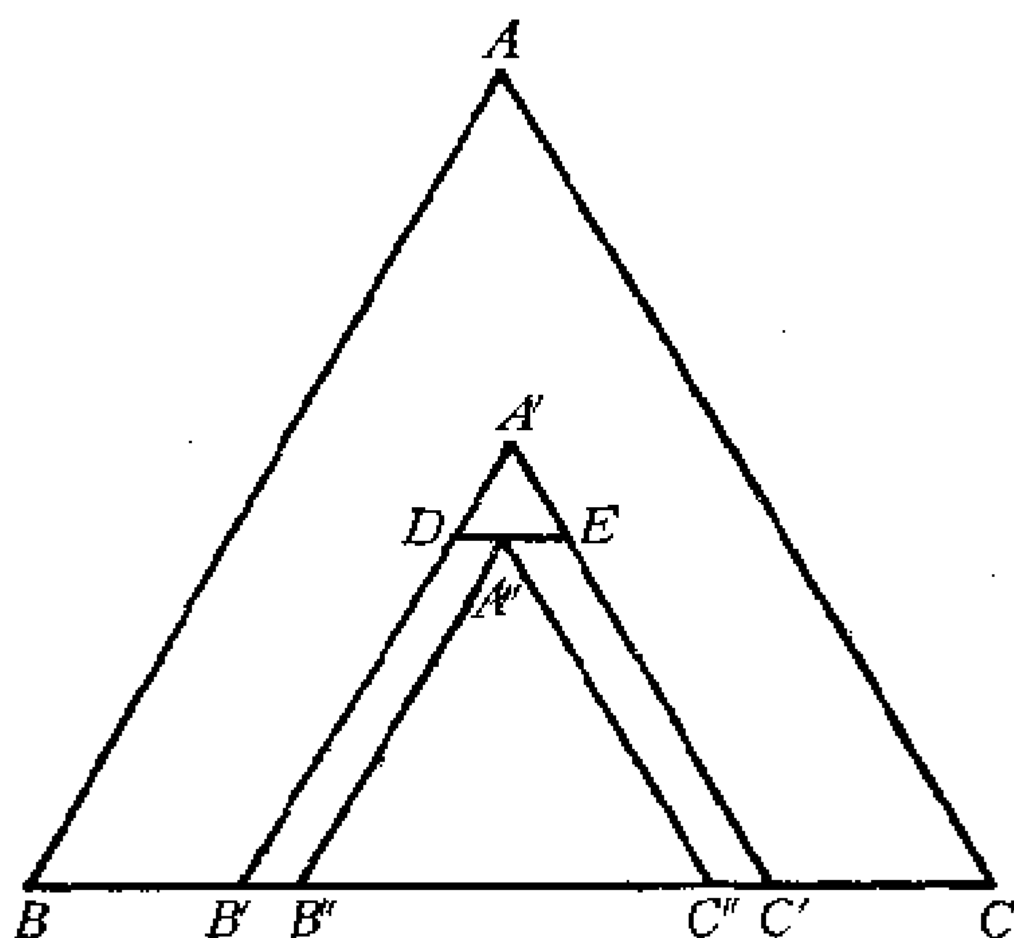


图 1

列兵数362人，余4尺平分后加到$B'B''$和$C''C'$上。以4约362人，得BB'，$C'C$上各列兵90人，余182人为$B''C''$上列兵数。

再求得后锐阵$A''B''C''$上列兵数，“内锐长阔人数副置，加一，以乘其副，得数半之，为内锐布兵”[7]。即由

$$S_n=\frac{n(1+n)}{2} \qquad (*)$$

给出

$$S_{A''B''C''}=\frac{182(1+182)}{2}=16653。$$

最后由方阵人数减去后锐阵人数，得前锐阵人数45847。

事实上，秦氏的解法是不合理的。由(*)可得整个锐阵ABC(包括前后锐阵及骑路)上列兵数为

$$S_{ABC}=\frac{375(1+375)}{2}=70500.$$

又$B'C'$上列兵数为182＋13＝195，故

$$S_{A'B'C'}=\frac{195(1+195)}{2}=19110,$$

因此，前后锐阵共列兵数为

$$\begin{aligned}S'&=S_{ABC}-S_{A'B'C'}+S_{A''B''C''}\\&=70500-19110+16653\\&=68043。\end{aligned}$$

这比原方阵人数$S=62500$多出5543人。也就是说，方阵人数不能布满这个锐阵。

本文给出如下的推算

令骑路宽可列n人。因

$S_{ABC}=70500$,

$S=62500$,

故　$S_{ABC}-S=8000$当为骑路上列兵数。又因骑路顶端小三角形$A'DE$列兵数为$\frac{1}{2}\cdot 2n\cdot(1+2n)$（参阅图2），故平行四边形$DB'B''A''$上列兵数应为

$$\frac{8000-n(1+2n)}{2},$$

而$A''B''$方向上列兵数应为

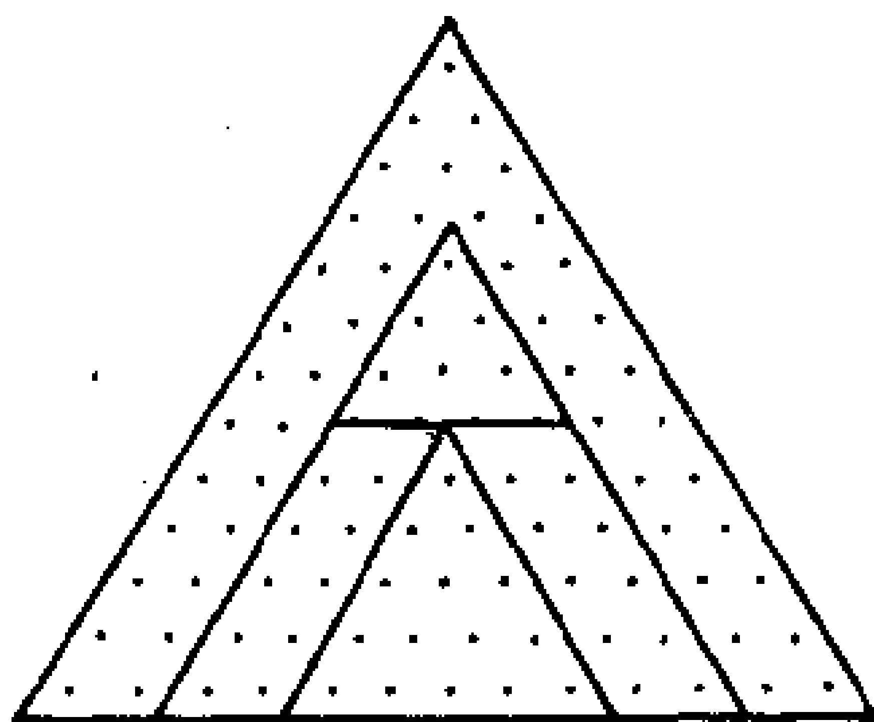


图　2

$$\frac{8000-n(1+2n)}{2n}, \quad (1)$$

此即后锐阵$A''B''C''$之底$B''C''$上列兵数。

据秦术所云"以四约阔布兵为外锐一边人"可知，锐阵当满足后锐阵底与前锐阵底大约相等这一条件，即

$B''C''$上的列兵数$=(BB'+C'C)$上列兵数，或即

$$B''C''\text{上列兵数}=\frac{1}{2}(375-2n) \quad (2)$$

由(1)，(2)得方程

$$\frac{8000-n(1+2n)}{2n}=\frac{1}{2}(375-2n)$$

解得$n=21$(精确到1人)。由此得$B'B''+C''C'$上列兵42人。由(1)得$B''C''$上列兵169人。$BB'+C'C$上列兵数为$375-(169+42)=164$人。

这样得到前后锐阵列兵$S'=62499$人，比原方阵兵数S少1人。即方变锐阵后余1人，按术中所说，所余1人可为补队兵。

秦氏的作法，先假定路宽5丈，由锐阵后广300丈减去2倍的路宽，所得290丈被人间距8尺约，又将余数的一半加到路宽上，这就限制了骑路宽只能是大于5丈而小于5丈4尺。与题目要求骑路在5丈以上是有矛盾的。又，求前锐阵人数用总数减后锐阵人数的算法也是不对的。馆按云："草中以内锐阵兵数减前方阵兵数，余为外锐阵兵数，非是，盖无以知两总数为相等也"[8]。本题若用天元术求解并非困难，但秦氏没有这样做，因而他是否了解天元术是可以怀疑的。至于秦书中蓍卦发微题两次提到"立天元一"，这个天元一只表示数字1，与宋元时期的天元术无涉。

四库馆臣发现了该题求前锐阵算法的错误应予肯定，但所给的解法仍然不对。馆按先假定骑路宽当20人，由此起算，所得结果比原方阵多20人。其假设路宽当20人与秦氏设路宽5丈的方法类似，殊非通法。梅瑴成(1681—1763)在康熙末年已将立天元一

的意义重新阐明，设四库馆时，载有借根方法的《数理精蕴》也已修成半个世纪之久，而馆臣尚不知运用，以致发现而不能改正秦氏的错误。

参考文献与注释

〔1〕宋景昌，《数书九章札记》卷四。宜稼堂丛书本。

〔2〕Yoshio Mikami, Development of Mathematics in China and Japan, pp.72—73, (1913).

〔3〕李俨，中算家的级数论，第十四节，载《中算史论丛》第一集，(1954)。

〔4〕钱宝琮，秦九韶《数书九章》研究，载《宋元数学史论文集》，(1966)。

〔5〕U. Libbrecht, Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, pp.172—176, (1973).

〔6〕Э. И. Березкина, Математика Древнего Китая, pp.158-160, (1980).

〔7〕秦氏在题中称为前后锐阵，在术草中称外内锐阵，本文用前一种名称。

〔8〕同〔1〕。

《数书九章》第九章互易三题释

沈　康　身

比例问题共有五种：

一、正比例　《九章算术》称今有术，《同文算指》称三率法，英文名simple proportion。

二、反比例　《九章算术》称反衰术，《同文算指》称变测法，英文名inverse proportion。

三、分配比例　《九章算术》称衰分术，《同文算指》称合数差分法，英文名proportional division。

四、复比例　我国古无专名，化成一、二类问题获解，《同文算指》称重准测法，英文名compound proportion。

五、连比例　刘徽称重今有术，《同文算指》无专门名称①。英文名continued proportion。

《九章算术》除设专章：粟米、衰分、均输讨论外，句股章中结合相似图形问题有所应用。刘徽注《九章算术》很重视今有术。各种类型比例问题都喜欢用今有术驾驭。对有关问题刘徽也愿意用今有术作为辅助手段来诠释题义，例如方田章宛田注，少广章开立圆注，商功章圆亭注，盈不足章第15题以漆易油题，方程章第18题新术都用今有术譬解。所以比例算法之在我国古代的熟练应用，可谓出神入化，已达炉火纯青的境界。

上述五种比例问题国内外中小学教材中都有一定篇幅，是初等数学教育必备内容。其中第一、二、三种问题人所熟知，而第

① 吴桂尧等“《同文算指·通编》李之藻翻译说质疑”，《杭州大学学报》1985年第1期。《同文算指·通编》仅录连比例一例，源自《算法统宗》。

四、五种问题则容易混淆。在《九章算术》的典型例子是：

例1 “今有取佣负盐二斛，行一百里，与钱四十。今负盐一斛七斗三升少半升，行八十里。问与钱几何？”（均输章第7题）这是复比例问题。这里有三对量（盐、行程、“与钱”），其中有五个量是已知数。古代印度与欧洲人对第一、二种比例问题（二对量中有三个已知数）解法称为三率法，称解三对量的复比例问题为五率法。如果题中有四、五、六对量相应称为七、九、十一率法。

例2 “今有络丝一斤为练丝一十二两。练丝一斤为青丝一斤十二铢。今有青丝一斤，问本络丝几何？”（均输章第10题）这是连比例问题。这里有甲、乙、丙三个量（络丝、熟丝、青丝）：已知甲乙、乙丙之比，求连比甲:乙:丙，从而获知答数。在本题中，据题意甲:乙＝4:3，乙:丙＝32:33。刘徽运用齐同术：“齐其青丝、络丝，同其二练”求出连比，

$$甲:乙:丙=4\times32:3\times32(=32\times3):33\times3=128:96:99$$

问题就迎刃而解。刘徽总结说：“凡率错互不通者，皆积齐同用之。放（模仿）此，虽四五转不异也。”也就是说，这种方法可以推广到四、五个量的问题。

例3 “今有漆三得油四，油四和漆五。今有漆三斗，欲令分以易油，还自和余漆。问出漆、得油、和漆各几何？”（盈不足章第15题）《九章算术》术文是用盈不足术解题的，而刘徽却别辟蹊径，在注中说：“求油及和漆者，四五各为所求率，三、五各为所有率，而今有之，即得也。”他改用今有术处理：把出漆三得油四，油四和漆五，看成连比3:4:5，借此算出如果原有8份漆取出3份，可得油4份，刚好调和余下的5份漆。而已给漆是三斗，从今有术易于得到答案 $30\times3\div8=11\frac{1}{4}$（升）。

限于历史条件，《九章算术》无三对以上有比例关系的算题。《数书九章》有复比例问题①。也有连比例问题②，而以第9章

① 如第7章第6题“堂皇程筑”，第8章第8题“军器功程”。

② 如第5章第1题“复邑修赋”，第2题“围田租亩”。

第3，4，5三题比较复杂，要用刘徽所说重今有术来解决。《数书九章》具体实践了刘徽预言："虽四、五转不异也。"

第 3 题互易推本："问出度牒，差人营运。每三道易盐一十三袋。盐二袋易布八十四匹。布一十五匹，易绢三匹半。绢六匹易银七两二钱。今趁到银九千一百七十二两八钱。欲知元关度牒道数几何。"答数180道。

题意是说以下各种票证、商品等值：度牒3，盐 13 袋；盐2袋，布84匹；布 15 匹，绢$3\frac{1}{2}$匹；绢 6 匹，银 7.2两。经过四次交换得银9172.8两，倒推原有度牒多少。《数书九章》在题后附有算图，用现行数字记出如下：

				3	度牒
			2	13	盐
		15	84		布
	6	3.5			绢
91728	72				银

术文说："以聚米互乘易法求之。列各数，以本色相对，如雁翅。以多一事者相乘，为实。以少一事者相乘，为法。除之。"这就是说把题中数据列成二斜行(如雁翅)如图，其中同一纵行列等值商品，同一横行列同种(本色)商品。上面的斜行有五个量(多一事)，相乘作为被除数。下斜行有四个量(少一事)相乘，作为除数。做一次除法，所得商就是答数。

事实上这是刘徽数学思想"凡率错互不通者，皆积齐同用之"的再现，秦九韶模拟重今有术，解五种量的连比例问题。我们知道如果有五个量：甲、乙、丙、丁、戊，已知甲:乙$=a:a'$，乙:丙$=b:b'$，丙:丁$=c:c'$，丁:戊$=d:d'$，那么连比甲:乙:丙:丁:戊$=abcd:a'bcd:a'b'cd:a'b'c'd:a'b'c'd'$。

第 4 题"菽粟互易"："问菽三升易小麦二升，小麦一升五合易油麻八合，油麻一升二合易粳米一升八合。今将菽十四石四斗欲易油麻，又将小麦二十一石六斗欲易粳米几何？"答数油麻 5 石 1

斗2升，粳米17石2斗8升。

这里一题二问：在题设条件下菽(豆)14石4斗问可以换多少油麻(芝麻)？小麦21石6斗可以换多少粳米？

原题术文后有二算图，用现行数字记出如

（上　图）

	30	14400菽	
15	20		麦
8			油麻

（下　图）

	15	21600麦	
12	8		油麻
18			粳米

上、下图都有文字说明："以下三事相乘为实，以上二事为法。"术文中除有与第3题同样叙述外，对此一题二问指出："以粟米换易求之……各得或问数，不干其率者不置。"这些见解都是正确的。

第6题"推计互易"："问库率糯谷七石出糯米三石，糯米一斗易小麦一斗七升，小麦五升踏曲二斤四两，曲一十一斤酝糯米一斗三升。今有糯谷一千七百五十九石三斗八升，欲出谷、做米、易麦、踏曲，还自酝余谷之米，须令适足，各合几何？"

这是一道反映在酿造过程中从糯谷经砻碾、易麦、制曲、配方等过程的算题。其中已知

糯谷(石)：出糯米(石)$=7:3$，

糯米(升)：换小麦(升)$=10:17$，

小麦(升)：制曲(斤)$=5:2\frac{1}{4}=5:2.25$，

曲(斤)：酝糯米(升)$=11:13$。

问题提出1759石3斗8升糯谷中应取出多少升加工成糯米，以此

數書九章卷第十八

魯郡　秦九韶

推計互易

問庫率糯穀七石出糯米三石糯米一斗易小麥一斗七升小麥五升踏麯二斤四兩麯一十一斤醞糯米一斗三升今有糯穀一千七百五十九石三斗八升欲出穀做米易麥踏麯還自醞餘穀之米須令適足各合幾何

列算圖

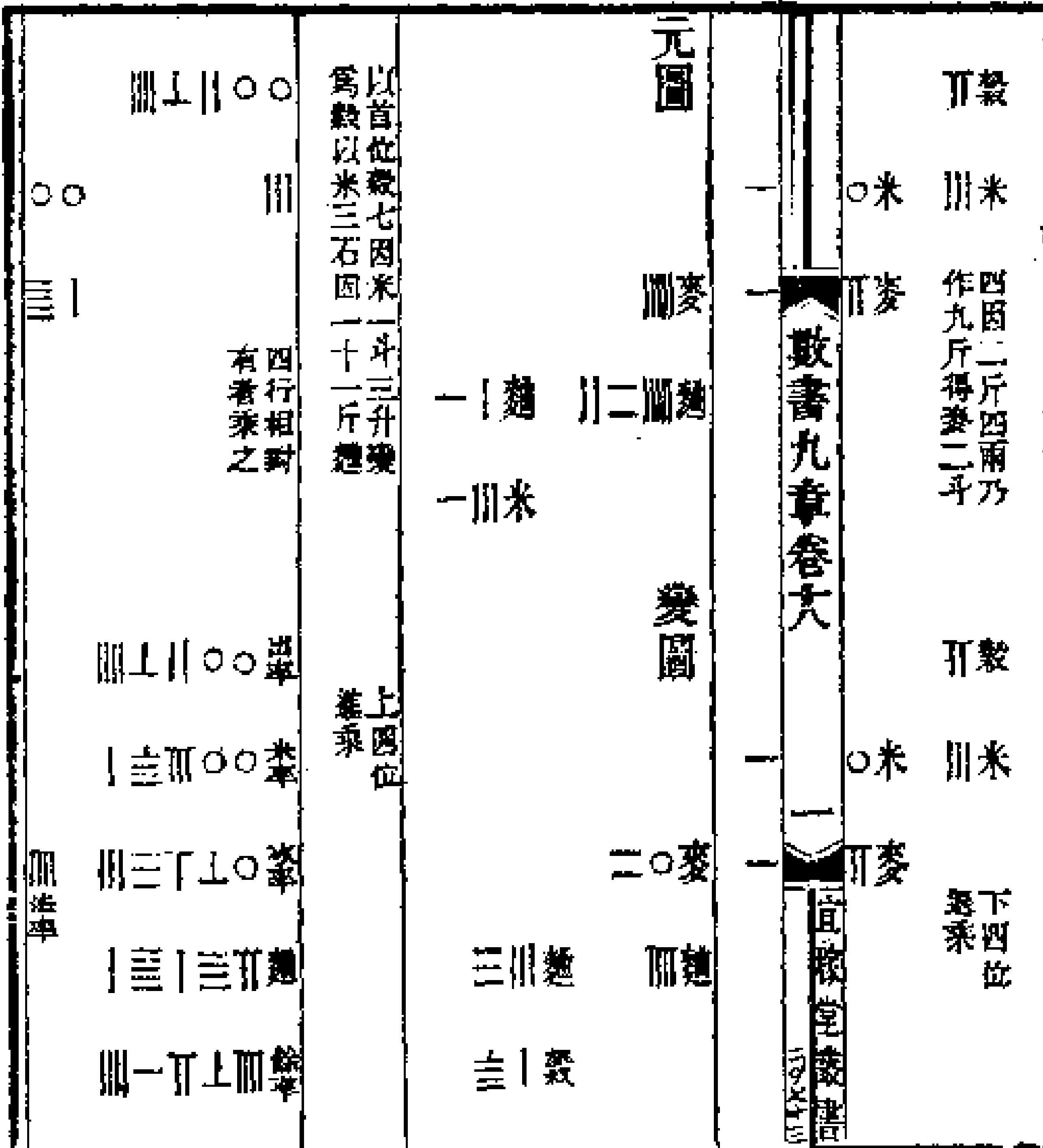


图 I

换麦、制曲适可以酿造余下糯谷加工成的糯米。显然这是本文例3所引《九章算术》盈不足章以漆易油和漆题的推广。秦九韶根据刘注精神改用重今有术(连比例法)得解。

题后有术文并列算图四幅。我们稍加注释就易以明了秦氏立术原意。

(元　图)

			7	谷
		10	3	米
	5	17		麦
11	2.25			曲
13				米

(变　图)

			7	谷
		10	3	米
	20①	17		麦
33②	9			曲
91				谷③

(合　图)④

		46200	出谷
	6600	3	米
660	51		麦

① 为避免小数，这一纵行较元图已扩大四倍。刘徽数学思想："凡所谓率者，细者俱细，粗则俱粗，……无所归滞也。"

② 题文7石谷可以出3石米，11斤曲可以酿13升米，那么33斤曲需要91升谷。借此可省去另立糯米一行。

③ 酿造需谷数。

④ 从变图五种量出谷、做米、换麦、制曲、酿造需谷数已知比 $a:a'=7:3$, $b:b'=10:17$, $c:c'=20:9$, $d:d'=33:91$，化为连比

出谷:做米:换麦:制曲:酿造需用谷 $=abcd:a'bcd:a'b'cd:a'b'c'd:a'b'c'd'$ $=7\times10\times20\times33:3\times10\times20\times33:3\times17\times20\times33:3\times17\times9\times33:3\times17\times9\times91=46200:19800:33660:15147:41769$。

合圖

率圖

五實皆如法而一

答數圖

答曰共穀一千七百五十九石三斗八升

出穀九百二十四石

得米三百九十六石

易麥六百七十三石二斗

踏麴三萬二百九十四斤

图 2

33　459　　　　曲
41969　　　　谷
（率　图）①
46200　出率
19800　米率
175938问数　87969法率②　33660　麦率
15147　曲

在率图之后的草文是

8128335600出谷定升　　92400出谷定升③
3483572400米实　　39600得米④
5922073080麦实　　77320易麦
2664932886曲实　　30293踏曲
7348754322余实　　83538余谷

五实皆如法而一⑤

3 米
7 法
250614实⑥。

---

① 见第438页注④

② 秦九韶参照刘注以率得柚题重今有术解法：如果有谷 $46200+41769=87969$，那么在其中取出 46200，通过一系列做米、换麦、制曲等手续，刚好可以酿所留41769谷所做米，而制曲数是15147。

③ 从率图结果很自然，题目已转化为正比例问题（刘徽在注均输章第10题"青丝络丝"题中说在重今有术中"虽各有率，不问中间"）。本题一开始就说今有谷175938升，经四算，得应出谷 $175938\times\frac{46200}{87969}=\frac{8128335600}{87969}=92400$（升），得米 $175938\times\frac{19800}{87969}=\frac{3483572400}{87969}=39600$（升），类似方法得易麦、踏曲、应留谷数。

④⑤ 答数都是以83538为除数的商。

⑥ 酿造需谷数折成糯米是 $83538\times\frac{3}{7}=\frac{250614}{7}\approx 385.02$（石）。

《数书九章》均货推本题分析

沈 康 身

《数书九章》第9章第2题"均货推本"："问有海舶赴务抽毕，除纳主家货物外，有沉香五千八十八两，胡椒一万四百三十包，包四十斤。象牙二百一十二合。系甲乙丙丁四人合本博到。缘昨来凑本，互有假借。甲分到官供称：本金二百两，盐四袋钞一十道；乙本银八百两，盐三袋钞八十八道；丙本银一千六百七十两，度牒一十五道；丁本度牒五十二道，金五十八两八铢。已上共估直四十二万四千贯。甲借乙钞，乙借丙银，丙借丁度牒，丁借甲金。今合拨各借物归元主名下为率，均分上件货物。欲知金、银、袋盐、度牒元价及四人各合得香、椒、牙几何？"题意是说四人合股经商南洋①，归航向海关纳税合赢余以下物资：沉香5088两，胡椒10430包(每包40斤)，象牙212合。出海前四人入股资本计甲：黄金200两，盐$4\times10=40$袋；乙：白银800两，盐$3\times88=264$袋；丙：度牒15张②，白银1670两；丁：度牒52张，黄金$58\frac{1}{3}$两。四人入股资本各值(折钱)10600贯。而其中丁的黄金从甲借来，丙的度牒从丁借来，乙的白银从丙借来，甲的盐从乙借来。题文求

(1) 黄金(两)、白银(两)、度牒(张)、盐(袋)各值多少？(2)甲、乙、丙、丁四人入股时自有财产折钱多少？(3)按入股时自有财产分摊赢余物资，各人应得多少？

---

① 宋代我国海运事业发达，海舶直达西亚、东非。元祐二年(1087年)时设立福建市舶司，浙路市舶司与广南市舶司以管理闽、浙、粤三省海运事业。

② 度牒 定额支票。

左行求得一約之各得數爲定率圖

首圖

次圖

定率圖右積得二千六百五十貫金五兩鹽一袋副積得一萬三千二百五十貫鹽三十三袋銀一百兩次積得二萬一千二百貫銀三百三十四兩度牒三道左積得三十一萬八千貫金一百七十五兩度牒一百五十六道乃以定圖次行之度牒三因左行左積得九十五萬四千貫金五百二十五兩度牒四百六十八道次以定圖左下度牒一百五十六道乘次行積得三百三十萬七千二百貫銀五萬二千一百四兩

图 1

理解本题列方程、解方程、完整回答问题的全过程可以看到十三世纪时我国数学水平的一个侧面。特别是《九章算术》方程术存今而有术无草，秦题草文完整保留消元步骤，计图十五幅。这是我国在线性方程组消元法(外国人称为高斯消元法①)所作贡献难得的实物证据。

从题设条件如用设未知数办法：度牒每张值 x 贯，白银每两值 y 贯，盐每袋值 z 贯，黄金每两值 w 贯，按题意列出方程组

$$\begin{cases} 58\frac{1}{3}w+52x=106000, \\ 1670y+15x=106000, \\ 264z+800y=106000, \\ 200w+40z=106000 \end{cases}$$

按照方程术传统，我国古代解方程组只记出所有系数成表(今称增广矩阵)，经过扩大、缩小，增损消元(今增矩阵的初等变换)，直到获得结果(今称化系数矩阵为单位矩阵)。

本题草文所附图十五幅，我们用现行数字记出，并作简要说明。

(首　图)

左行	次行	副行	右行
106000贯	106000贯	106000贯	106000贯
金$58\frac{1}{3}$	0	0	金 200
0	0	盐 264	盐 40
0	银1670	银 800	0
度牒52	度牒15	0	0

① 在欧洲，矩阵初等变换法是德国数学家高斯(C. F. Gauss，1777—1855)首创，上距《九章算术》成书已达一千七百多年。

这显系方程组的增广矩阵。

草文说“置估值四十二万四千贯，以四人约之，得一十六万六千贯为各积、次置甲金二百两于右上，……四十袋于右副，为右行，次置乙……盐二百六十四袋及银八百两为副行。次置丙银一千六百七十两、度牒一十五道为次行，次置丁度牒五十二道、金五十八两八铢为左行”。

（次　图）

318000	106000	106000	106000
175	0	0	200
0	0	264	40
0	1670	800	0
156	15	0	0

首图左行扩大三倍，使各元素全部变为整数，草文说：“金带八铢，是三分之一两，乃以分母通乘左行诸数……为次图。”

（定率图）

318000	21200	13250	2650
175	0	0	5
0	0	33	1
0	334	100	0
156	3	0	0

草文说：“验次图四行，皆可求等，副行约得八，约之。次行约得五，约之，右行约得四十，约之，……各行数得定率图。”

(维　图)

955000	3307200	13250	2650
525	0	0	5
0	0	33	1
0	52104	100	0
度牒468	度牒468	0	0

草文说:"乃以定图次行之度牒三,因左行左积……,次以定图左下度牒一百五十六道乘次行积"得维图。

(音　图)

318000	2353200	13250	2650
175	金-525	0	金 5
0	0	33	1
0	52104	100	0
156	0	0	0

草文说:"乃验维图左及次行之下,度牒等,当相减之……当以左之少积,来减次之多积……乃成音图。"

(爻　图)

318000	2353200	13250	278250
175	金-525	0	金 525
0	0	33	105
0	52104	100	0
156	0	0	0

草文说:"乃验音次(行)之负金,当以右行之正金补之,而其数不等,先以右金五,约次金五百二十五,得一百五,以乘音图右行毕……",其副、次、左三行如音图,故乃成爻图。

(政　图)

318000	2631450	13250	2650
175	0	0	5
0	盐　105	盐 33	1
0	2104	100	0
156	0	0	0

草文说："今视叉图右行之金正，与次行之金负，适等，即用右行直加次行……而成政图。"

(卜　图)

318000	28945950	463750	2650
175	0	0	5
0	1155	1155	1
0	573144	3500	0
156	0	0	0

草文说："今视政图……副、次两行盐数三十三与一百五求等，得三，故以三约三十三得一十一以乘次行，又以三约一百五，得三十五，以乘副行毕……列成卜图。"

(官　图)

318000	28482200	13250	2650
175	0	0	5
0	0	33	1
0	银569644	100	0
156	0	0	0

草文说："乃视卜图副行积少，次行积多。即以副行求减次行……既毕……列为官图。"

（干　图）

318000	50	13250	2650
175	0	0	5
0	0	33	1
0	银 1	100	0
156	0	0	0

草文说："验宫图次行下只有银五十六万九千六百四十四两独一数以为法，以次(行)积二千八百四十八万二千二百贯为实，实如法而一得五十贯，为银一两价，而成干图。"至此得到其中一个未知数值。

（曜　图）

18000	50	8250	2650
175	0	0	5
0	0	33	1
0	1	0	0
156	0	0	0

草文说："乃以干图副行银一百两，乘两价五十贯，得五千贯，以减干图副行之积一万三千二百五十贯，讫……而成曜图。"

（支　图）

318000	50	250	2650
175	0	0	5
0	0	盐 1	1
0	1	0	0
156	0	0	0

草文说："乃以曜图副行之积八千二百五十贯为盐实，以其下盐三十三袋为法，除之，得二百五十贯，为盐一袋价，而成支

图。"至此已求得第二个未知数值。

（闰　图）

318000	50	250	2400
175	0	0	金 5
0	0	1	盐 0
0	1	0	0
156	0	0	0

草文说："乃以支图右行盐一袋遍乘副行毕，其副积只得二百五十贯，次以副行直减右行毕，右积余二千四百贯，金五两、盐空，而成闰图。"

（定　图）

23500	50	250	480
0	0	0	金1
0	0	1	0
0	1	0	0
156	0	0	0

草文说："乃以闰图右积二千四百贯为实，金五两为法，除之，得四百八十贯，为金一两，成定图。"至此已求得第三个未知数值。

（终　图）

1500	50	250	480
0	0	0	金 1
0	0	盐 1	0
0	银 1	0	0
度牒 1	0	0	0

草文最后说："今验定图左积二十三万四千贯为实，以左下度牒一百五十六道为法，除之，得一千五百贯为一道价以成终图。"

以成紈圖既得金銀每兩鈔塩每袋度縢每道各色之價式列甲乙丙丁四人乘之

副 價文 二〇〇〇〇〇 金一兩 塩一袋 〇 〇

價文 三〇〇〇〇 〇 〇 〇

紈圖

右 價文 [illegible]〇〇〇〇 〇 〇 銀一 〇

左 價文 一[illegible]〇〇〇〇〇 〇 〇 〇 度縢一道

後以首圖右金二百兩併左金五十八兩八銖得二百五十八兩以八銖爲三分兩之一通分內子得七百七十五於左甲其右價四百八十貫乃以左甲每三約之爲一百六十貫於右甲式以右鹽四十袋併副鹽二百六十四袋得三百四袋於左乙式以副銀八百兩併式銀一千六百七十兩得二千四百七十兩爲左丙又以式行度縢一十五道併左度縢五十二道得六十七道爲左丁以丙行對乘之

右行 丁一 甲 [illegible] 〇 一[illegible]

图 2

首图(方程组增广矩阵)经过十四次初等变换最后获得终图(系数矩阵已变换为单位矩阵)，全过程井然有序，完全合乎现代数学应尽章法。这样就对题文要求(1)即各种货币、票证单价已得到：黄金每两480贯，盐每袋250贯，银每两50贯，度牒每道1500贯。

对题文要求(2)，即甲、乙、丙、丁四人入股时自有财产，术文说："诸价列右行，以各物数列左行，以两行对乘，得各本率。"从草文所示，这就是指

甲有黄金值　$480\times 258\frac{1}{3}=124000$(贯)，

乙有盐值　$250\times 304=76000$(贯)，

丙有银值　$50\times 2470=123500$(贯)，

丁有度牒值　$1500\times 67=100500$(贯)。

对题文要求(3)，即四人应分摊多少赢余物资，术文"以诸色求等①，约之得列衰。诸衰为总体，此列衰遍乘各物诸数，各为实。诸实并如总体而一。各得其物。"这就是把所赢余的沉香、胡椒、象牙按入股自有财产配分比例。按草文所记运算如下

124000:76000:123500:100500＝248:152:247:201

以此分配比例三种物资，秦九韶算得正确结果如下表：

物　资	沉香(两)	胡		椒	象牙(合)
		包	斤	两	
甲	1488	3050	11	$5\frac{7}{53}$	62
乙	912	1869	21	$2\frac{6}{53}$	38
丙	1482	3037	39	$5\frac{23}{53}$	$61\frac{3}{4}$
丁	1206	2472	8	$3\frac{17}{53}$	$50\frac{1}{4}$

① "诸色"，指四人入股时自有财产，"求等"指求四者最大公约数。

《数书九章》中的统计资料①

李　　迪

秦九韶的《数书九章》是我国古代数学杰作之一，素以大衍求一术、高次方程数值解法等成就著称于世。这部书内容丰富，包括较多的数学成果，至今未被人们挖掘净尽。某些重要成就，尚无人注意，有关随机抽样的应用就是其中之一。

《数书九章》卷十二，"米谷粒分"题便是这种应用的例子，原题及答案如下：

"问开仓受纳，有甲户米一千五百三十四石到廊。验得米内夹谷，乃于样内取米一捻，数计二百五十四粒，内有谷二十八颗。凡粒米率，每勺三百，今欲知米内杂谷多少，以折米数科责及粒，各几何？

答曰：米，一千三百六十四石八斗九升七合六勺〔一百二十七分勺之四十八〕。

谷，一百六十九石一斗二合三勺〔一②百二十七分勺之七十九〕。

合折米八十四石五斗五升一合一勺〔一百二十七分勺之一百三〕。

元米折米，共计四十三亿四千八百三十四万六千四百五十六粒。"

1534石米中夹杂有多少谷子，如果用通常的数学方法是无法

---

① 本文曾于1983年10月中国数学会第四次代表大会和中国科学技术史学会第二次代表大会分组会上宣读，并散发了论文摘要。

② 《宜稼堂丛书》本等现传本多误为二，今经验算改正。

计算的，必须用随机抽样的方法进行处理。《数书九章》所记之方法，关键在于"乃于样内取米一捻，数计二百五十四粒，内有谷二十八颗"，这是一捻的总粒数与谷粒数。此数是数出来的，但它是通过两次随机取样，即先从1534石米中随意取出一小部分(如一斗，一升或是一盆)做为检验的样品，再从样中随意取一捻。一捻的数量很少，可直接分清纯米与谷，容易数出来。以后的计算就归结为算术了。

为了计算上能利用取样的结果，秦九韶以最小的容积单位"勺"为标准，取一勺为三百粒(这本身是个概数)。算法步骤是："以粟米求之，衰分入之。置样米粒数，为法，以带谷颗数减之，余与谷为列衰〔可约，约之〕，以共米乘列衰，为各实，实如法而一，各得米数、谷数。置谷数，以粟率折之，为谷所折米，次以勺率，遍乘米率折米，得粒数。"这段文字的内容是：

设a为样米粒数，b为谷粒颗数，则$a-b$为纯米粒数。$a-b$与b为列衰，"可约，约之"即约去它们与a的最大公因数d，变为$\frac{a-b}{d}=c$、$\frac{b}{d}=b_1$及$\frac{a}{d}=a_1$。

设共米数为p，则$\frac{pc}{a_1}$、$\frac{pb_1}{a_1}$分别为米数(不夹杂带谷的颗粒)、谷数。

再把谷数折为米数，即"置谷数，以粟率折之"。折率，秦九韶采取《九章算术》的数——"粟率五十"，即按50%相折，结果为

$$\frac{pb_1}{a_1}\times 50\%=\frac{pb_1}{2a_1},$$

这就是米数(以容积计算)。

把两项米数加起来，即$\frac{pc}{a_1}+\frac{pb_1}{2a_1}$，再变成粒数。因每勺为300粒，乘上数，也就是$\left(\frac{pc}{a_1}+\frac{pb_1}{2a_1}\right)\times 300$(粒)即得。

把具体数字分别代入$\frac{pc}{a_1}$、$\frac{pb_1}{a_1}$、$\frac{pb_1}{2a_1}$和$\left(\frac{pc}{a_1}+\frac{pb_1}{2a_1}\right)\times 300$

中就得到了书上的四个答数。

从上面的算法可以看出，是从总体中随机地抽出一批个体(一个一个地抽)组成样本，再把样本分为两类，求出两类个体的个数分别与样本中个体总数之比率，在本题中为$a:a-b:b$(=254:226:28=127:113:14)。最后把这个比率推总体。

对于检验米中的谷粒有多少就不能从总体中一粒一粒地抽，因为从外形上可以很容易辨认出哪一粒是谷还是米，所以用一捻的抽法为合理，一捻相当于样本，其中的每一粒都相当于个体，可看做是一个一个被抽出来的。这种抽法符合现代单纯随机抽样原理。从数学本身来看，抽法正确。如从实际来看，结果可能有较大的抽样误差。很显然，在一大堆米中一般地说谷与纯米的分布不均匀，一次取样，从样中取一捻可能遇上谷子多或少(与概率平均数比较)，因此应多取样和多取几捻，求出各自的概率值，再求概率平均值，才能接近实际。不过，我们不应苛求古人，能够做到这一点也就十分难能可贵了。

《数书九章》中所用单纯随机抽样方法，不一定是秦九韶所首创，因为米中夹杂谷粒的问题早已存在，所以到一定时候官府或买主必然要想办法检验米中的谷数。估计至迟也是宋代所普遍使用的方法，秦九韶把它写入自己的著作中。就以《数书九章》成书的1247年计算，到现在也已七百三十多年了。

在现代数学中，是古典概率的应用。现代西方古典概率问题起源于十七世纪，之后有人用抽样方法研究人寿、性别等等，已在《数书九章》之后三四百年了。

《数书九章》与南宋社会经济

李　　迪

中国古代数学著作大都与当时社会经济有密切关系，上至《九章算术》，下迄《算法统宗》，莫不如是，其中《数书九章》在这方面更为突出。《数书九章》一书包括极为丰富的南宋经济史料，有些史料是其他书上少见的，补充了史书之不足，因此本书对于研究南宋社会经济史有重要价值。这种情况和秦九韶的广泛兴趣、工作经历有直接关系，他曾以通直郎为建康通判[1]，"职掌倅贰郡政，凡兵民钱谷、户口、赋役、狱讼听断之事，可否裁断，与守臣通签书施行"[2]。可以说，秦九韶接触社会经济问题的机会特别多，把这些问题有选择地编入书中。他在序中说："窃尝设为问答，以拟于用。"写书的目的就是为了应用，为了解决经济计算问题。因而，《数书九章》中有关社会经济的问题，虽然有虚设的数据，但就所讲的事情来说则完全是真实的，没有杜撰。

现在分以下几个方面加以论述。

一、政府买卖谷物与斗斛。买入谷物叫"籴"，卖出谷物叫"粜"，自古有之。封建王朝为了养活大批军队和官员，每年要消耗大量的粮食；有时也要把存粮向老百姓抛售，在宋代遇"诸州岁歉，必发常平、惠民诸仓粟，或平价以粜，或贷以种食，或直以振给之，无分于主客户"[3]。就是说某些州县发生灾荒的时候，宋政府把买入之谷物以平价卖出，或无偿发放。但是后来越籴越厉害，花样翻新，名目繁多，到南宋有时简直是用分配的办法强行收购。宝庆三年（公元1227年）监察御史汪刚中指出："和籴之弊，其来非一日矣"，建议改革。平民百姓买、卖谷物也叫"籴"、"粜"，不是

官府专用名词。“籴”和“粜”在《数书九章》中都有反映，书中与此有关的数学题共四道。这些题不仅讲到买卖谷物的一般计算问题，而且涉及到粮价、容积、仓库和牙钱等问题，资料十分珍贵。

卷二“分粜推原”题：“问有上农三人，力田所收之米，系用足斗均分，各往他处出粜。甲粜与本郡官场，余三斗二升；乙粜于安吉乡民，余七斗；丙粜于平江攬户，余三斗。欲知共米及三人所分各粜石数几何。”

这是一道农民出售自产谷物问题，我们现在关心的不是如何求出答案，而是要考虑与经济有关的问题。这里最值得注意的是当时的量器资料，在解题时首先给出了官斛、安吉斛和平江斛的容积，“术曰：以大衍术求之，置官场斛率、安吉乡斛率、平江市斛率，为元数”，原注称：“官私共知者，官斛八斗三升，安吉乡斛一石一斗，平江市斛一石三斗五升”。据“草曰：置文思院官斛”，所谓官斛就是南宋政府机构文思院所颁发的量器。文思院：“掌金银、犀玉工巧及彩绘、装钿之事。凡仪物、器仗、权量、舆服所以贡上方、给百司者，于是出焉”[4]。可见，度量衡的管理职责归文思院。

根据这道题可知，南宋的量器是很乱的，除官斛外，地方上各有各的量器，而且大小差别很大。根据书中给出的数据可立即算出安吉乡斛、平江市斛与官斛的比率：官斛一斗相当于安吉乡斛一斗三升二合半，相当于平江市斛一斗六升二合四。此外，在杨辉《续古摘奇算法》卷上还记有一种“杭州百合”斛。这为南宋度量衡研究增加一条新史料。但是当时的斛斗多大，这里没有直接给出，在卷十二“囤积量容”中给出了“租斗”的容积：“今出租斗一只，口方九寸六分，底方七寸，正深四寸，并里明准尺。先令准数造五斗方斛及圆斛各二只”。由此可算出“租斗”的容积为$\frac{1}{3}\times 4\times(9.6^2+7^2+9.6\times 7)=277.81$立方(宋)寸。然后再计算五斗方斛和圆斛。

卷十“均定劝分”题：“问欲劝粜赈济，据甲民物力亩步排定，

共计一百六十二户，作九等……”。这是官府向农民派购粮食的例子，实际上是否均分则不一定，但是按九等户分等派购可能是事实。早在北宋就开始推行“劝籴”、“均籴”制度，“均籴”“以家业为差”。“劝籴”以字义理解，应是通过说服使农民向官府售粮，但是《数书九章》中所说的“劝粜”已是北宋推行的“均籴”。可见，南宋政府想尽办法收购粮食。

卷十一“课籴贵贱”题，也说“文思院斛每斗八十三合”，与“文思院官斛八斗三升”完全相同。这一题的重要性在于给出了许多地区的粮价，“欲皆以官斛计石钱，相比贵贱”，就是以官斛为标准计算一些地区粮价高低，答案如下：

“文思院斛石钱：

安吉州二十三贯一百六十四文〔一十分文之六〕，

平江府二十二贯七十一分〔二十七分文之二十三〕，

隆兴府二十一贯五百七文〔二十三分文之一十九〕，

潭州二十贯六百七十九文〔五十九分文之三十三〕，

吉州一十九贯八百八十五文〔一十二分文之五〕”。

这些答案虽然是计算出来的，可以说是人为的，但是肯定不会离实际太远，而且上述五个地区的粮价有很大不同。离首都（临安）越远的地方米价越低，这也符合一般的规律。南宋前期乾道四年（公元1168年）政府籴米“石钱二贯五百文”[5]，由此我们看到：到秦九韶写书的时候，八十年间粮价上涨了十倍以上。当时，国内战争连年不断，军需急剧增加，还有官僚们的大量消耗，而且生产遭受破坏，粮食产量下降，粮价自然上涨，官府买粮只好多付钱，为此大量发行钱币和钞票。因此，《数书九章》所载算题的粮价，基本上符合实际。

第十二卷“积仓知数”题：“问和籴米运，借仓权顿，计五十敖，每敖阔一丈五尺，深三丈，米高一丈二尺。又借寺屋四十间，内二十五间阔一丈二尺，深二丈五尺，米高一丈；内一十五间，各阔一丈三尺，深三丈，米高一丈二尺，欲知寺屋及仓容米共计几

何。"这题是计算官府临时存放粮食的数量问题，答案是共计米一十六万六千八十石。放粮的地方，一是仓库，一是寺屋。题中的"敖"即敖仓，亦即仓子；寺屋即官舍。当时的粮税也很高，据记载，端平二年(1235)"隆兴府管催秋苗一十九万一千七百一十八石……"[6]。隆兴府辖今江西南昌市附近的九个县，每县平均二万多石。根据题中所说的内容可以反映出这样一个问题：官府购粮的数量是相当可观的，而且没有足够的仓库，只好堆放在官舍，等待转运。

卷十二"推知籴数"题："问和籴三百万贯，求米石数，闻每石牙钱三十，籴场量米折支牙人所得，每石出牵钱八百，牙人量米四石六斗八合，折与牵头，欲知米数、石价、牙钱、牙米、牵钱各几何。答曰：籴到米一十二万石。石价二十五贯文。牙钱三千六百贯文，折米一百四十四石。牵钱一百一十五贯文。"此题涉及到当时社会经济的资料较多，首先是米价，每石为二十五贯，比上面提到的安吉州每石高出将近二贯，比吉州高出五贯多。以离当时首都临安越近米价越高推知，这个米价大约是临安及其附近地区的。其次，籴米要花牙钱，每石三十文。当时大宗买卖有职业介绍人，此种人叫"牙人"，成交时牙人抽取一定的钱，这就叫"牙钱"。牙钱每石三十文实在不低，即使书中的答案有人为的成分，也不会离题太远。把牙钱折合成米就是牙米。所谓"牵钱"就是运输费。

二、利息与典当。利息在宋代是多种多样的，说明社会经济状况的复杂化。《数书九章》中有好几道涉及到利息的问题，卷一"推库额钱"题说："问有外邑七库，日纳息足钱适等，递年成贯整纳，近缘见钱希少，听各库照当处市陌，准解旧会，其甲库有零钱一十文，丁、庚二库各零四文，戊库零六文，余库无零钱。甲库所在市陌，一十二文，递减一文，至庚库而止。欲求诸库日息元纳足钱展省，及今纳旧会并大小月各几何。"这里所说的"库"是指收藏钱币的地方，即是金库。在外库存钱要交利息，利息的多

少要“听各库照当处市陌”来定，因此各地是不同的。“市陌”就是买卖东西的地方，亦即集市。至于利息的具体数额本题没有给出。但是，利息是按天计算的，即是“日纳”。因此，大月(三十天)和小月(二十九天)的利息总额就不相同。本题“草”中说：“以贯约为二十六贯九百五十文，为诸库日息等数，以官省七十七陌，展得三十五贯文”，一贯为一千文，因此，实际上是26950÷0.77=35000，就是当地的利息低，是官省的百分之七十七。

卷十二“累收库本”题：“问有库本钱五十万贯，月息六厘半，令今掌事每月带本纳息，共还十一万。欲知几何月而纳足，并末后畸钱多少。”这里给出了月息数为六厘五。“草曰：置本五十万贯，以六厘五毫乘入共本内，得五十三万二千五百贯文”，一个月纳利息三万二千五百贯文。如果这种情况基本属实，利息实在高得惊人!

卷十八“推求本息”题讲了本钱多少不同，利息的厘数也有差别的问题：“问三库息例，万贯以上，一厘；千贯以上，二厘五毫；百贯以上，三厘。甲库本四十九万三千八百贯，乙库本三十七万三百贯，丙库本二十四万六千八百贯。今三库共纳到息钱二万五千六百四十四贯二百文，其典率，甲反锥差，乙方锥差，丙蒺藜差，欲知元典三例本息各几何?”题中未说是年息还是月息，存钱越多息越薄。这也许是实际情况的反映。所谓“反锥差”、“方锥差”和“蒺藜差”是指各库本钱万、千、百份数的三种比例，反锥差为3:2:1，方锥差为1:4:9，蒺藜差为1:3:6。以此把各库的本钱分开，然后再分别乘以厘数，就得到各库的利息。这三个名词不见于他书，是为经济史上的新资料。李倍始在他的著作中已经提到了这件事[7]。

卷十八“推求典本”题是关于典当的问题：“问典库今年二月二十九日，有人取解一号主家，听得当事共计算本息一百六十贯八百三十二文，称系前岁头腊月半解去，月息利二分二厘。欲知元本几何。”典当的月息太高了，从当铺拿一文钱，到一个月就得给

二分二厘的利钱，也就是月利高达百分之二十二！典就是把东西抵押出去，得一些钱，到规定的限期再拿钱把东西赎回，但是要给出钱者一定的利息。典当之事起于何时不得而知，至晚在唐朝已经盛行，白居易(772—846)有“典桑卖地纳官租，明年衣食将何如?”的诗句[8]。至于唐朝是否有专门的当铺还不清楚，可是《数书九章》却说有“典库”，这就是当铺。这项资料是非常重要的。

三、各种租税问题。南宋时期租税五花八门，十分繁重，老百姓叫苦不迭。陆游(1125—1210)有这样一首诗：“有山皆种麦，有水皆种秔；牛领疮见骨，叱叱犹夜耕。竭力事本业，所愿乐太平；门前谁剥啄？县吏征租声。一身入县庭，日夜穷笞搒。人孰不惮死？自计无由生。还家欲具说，恐伤父母情。老人傥得食，妻子鸿毛轻。”[9]描述了一幅农民由于租税负担沉重的惨景。不仅税重，而且还得额外多拿。这种情况，就是在统治集团内部也感到是个大问题，绍熙元年(1190)秘书监杨万里(1127—1202)就指出东南地区赋税的繁重情况，他说：“民输粟于官谓之苗，旧以一斛输一斛，今以二斛输一斛矣。输于官谓之税，旧以正绢为税绢，今正绢外有和买矣。旧和买官给其直，或以钱，或以盐，今皆无之，又以绢估直而倍折其钱矣。旧税亩一钱输免役一钱，今岁增其额，不知所止矣。既一倍其粟，数倍其帛，又数倍其钱，而又有月桩钱、版帐钱，不知几倍于祖宗之旧，又几倍于汉、唐之制乎。此犹东南之赋可知也，至于蜀赋之额外无名者，不可得而知也。”[10]到秦九韶的时候，情况更加严重，吴潜说：“今自江以南二浙、江东西、湖南、福建诸郡，一石之苗有量至二石五六者，有至二石三四者，少亦不下二石一二。”[11]这种情况，在《数书九章》中有明显的反映。

卷十“宽减屯租”题是讲屯田交租问题：“问屯租欲议宽减，仍听以夏麦折纳分数，官牛种者，与减二分；私牛种者，与减四分。每岁租谷，以三分之一许夏折二麦，内四分大，六分小。折色每大麦三石，折小麦二石，小麦二石折谷三石五斗。……”。就是说

夏租可以交粮食，题说"宽减屯租"很可能是事实上屯租已过高，屯田者负担太重，因此秦九韶造了这么一道题，讨论"宽减"。题中又给出了大麦、小麦和谷之间的比为3:2:3.5。题中还有"屯租旧额官种一石纳租五石，私种一石纳租三石"的话，租额是过高，贫瘠的土地产量很低，缴租是种子的五倍或三倍，很可能有些地方的产量就达不到这个程度。

卷十"均科绵税"题是讲一个县收绵税的问题，绵是蚕丝，宋代赋税，缴纳实物的有四大类，绵为"帛之品十"中的第九种[10]。根据题的内容，知按五等户缴纳，答案是：上等户一户一百二十四两，副等户一户六十二两，中等户一户三十一两，次等户一户一十二两四钱，下等户一户四两九钱六分。

卷十"户税移割"题是讲由于田地的转户，赋税随之改变的计算问题，其中涉及到纳苗、夏税、紬绢与和买，以及紬绢折帛。早在北宋初就有夏税、苗亩、和买之设，而紬、绢则是上缴"帛之品十"中的两种。"和买"一词起源甚早，据吴曾考证："和买二字见孔颖达左氏正义，昭公十六年，晋韩起聘于郑，宣子有环，其一在郑商，宣子买诸贾人，既成矣。……颖达云：上称买诸贾人，则是和买"[12]。南宋的和买弊病多端，就是统治阶级内部也有人看到问题的严重性，建议彻底改革[13]，实际上是不可能的。

卷十二"分定纲解"题："问州郡合解诸司窠名钱，户部九十六万五千四百二十一贯文，总所六十四万三千六百一十四贯文，运司一万六千九十贯三百五十文。今诸窠名，先催到九千二百五十三贯六百二十文，欲照元额分数，均定桩米候解，合各几何。""窠名"就是项目、名目，"窠名钱"就是某项目的税收。南宋初朱熹(1130—1200)说："臣闻虞允文之为相也，盖取版曹岁入窠名之必可指拟者，号为岁终羡余之数而输之内帑。"[14]《数书九章》讲到"州郡合解诸司窠名钱"分归户部、总所和运司三个部门，一百六十多万贯才先催到不足一万贯，可见老百姓"拖欠"官府的诸种窠名钱太多了，无法缴纳。早在南宋前期，不得不宣布免除一些地方所

欠之窠名钱，例如乾道四年(1168)诏："四川诸州欠绍兴三十一年至隆兴二年赡军诸窠名钱物，暨退剥亏分之数，及漏底折欠等钱，并蠲之。"[10]

四、会子与度牒。"会子"是一种纸币，北宋时期发行一种纸币叫"交子"，南渡以后又发行"会子"。据记载，绍兴三十年(1160)"户部侍郎钱端礼被旨造会子，储见钱，于城内外流转，其合发官钱，并许兑会子输左藏库"。第二年置会子务隶都茶场。"会子初行，止于两浙，后通行于淮、浙、湖北、京西"[15]。推行全国，而且"民间典卖田宅、马牛、舟车等如之，全用会子者听"[15]，就是说会子和铜钱、铁钱一样可以在各种交易中流通。会子最初发行时规定了一定的数量和使用年限(以三年为界)，后来越发越多，"界"也延展，到绍定五年(1232)已发到十三界，十二、十三两界会子的数量已达二亿二千九百余万。但是还在发行新会子，仅时隔八年，到嘉熙四年(1240)便发行到十八界，该年"九月令措置十八界会子，收换十六界，将十七界以五准十八界一券，行用，……"[16]。淳祐三年(1243)臣僚上言："适十七界之更印，已杂用川、杜之纸，至十八界则全用杜纸矣。纸既可以自造，价且五倍于前，故昔之为伪者难，今之伪造者易。"[15]混乱状况于此可见。"度牒"原系官府发给出家僧尼的凭证，有牒的可免除地税、徭役。但是到后来，官府便出售度牒，以所获充军政费用，成为人民正税之外的负担。如嘉定(1208—1224)初很多地方发度牒，有的七千道〔每道为钱一千贯〕，达七百万贯，等等。

会子和度牒在《数书九章》中都有反映，卷十一"折解轻赍"题中支付佣钱用会子，而且有新、旧两种。说的是有甲、乙、丙、丁四个郡，往京里送银、绢，佣钱和新会或旧会的价值如下：

甲郡：每担一里，佣钱六文整，其时旧会价每贯四十五文整。

乙郡：每担一里，佣钱四文二厘，其时旧会价每贯五十九文整。

丙郡：每担一里，佣钱八十文，旧会。(已知：银每两新会九

贯三百文，绢每匹新会一十贯三百文)。

丁郡：每担一里，佣钱一百文,旧会。(已知：银每两旧会五十一贯文，绢每匹旧会五十八贯文)。

这里给出了不同地方会子的价值不一样的事实，有高有低。佣钱都是以里为单位计算，而且不同地方佣钱也不同。所说“新会”、“旧会”是哪一界在题中没有说明，但在解题步骤中说“以五约旧会，为新会”，在演算过程中也说变新会为旧会以五乘,可见是指十七界会子和十八界会子，是嘉熙四年(1240)九月以后的情况。《数书九章》成于公元1247年，即在七年间，会子的情况没有大变化，新、旧之比还是1:5。就在这年南宋政府规定“以十八界与十七界会子更不立限，永远行使”[15]，情况是一致的。

在卷十一“算回运费”题中也提到“十七界会子”，是讲在长江上运米的水脚钱用十七界会子支付，还给出：水程二千一百三十里，每石水脚钱一贯二百文，同卷“课籴贵贱”题给出一些里程的水脚，并都以十七界会子支付。脚钱是：平江府到镇江每石九百文，安吉州到镇江每石一贯二百文，隆兴府到建康每石一贯七百文，吉州到建康每石二贯九百文，潭州到鄂州每石二贯一百文。

卷十七“均货推本”题讲到做买卖用度牒做本钱，每道一千五百贯。嘉定五年(1212)有“每度牒一道，价千五百缗”[12]的倡议，一缗为千钱，就是一贯。可见《数书九章》所用的数值是嘉定五年以后的制度。

卷十七“互易推本”题是关于用度牒换盐、布、绢、银的计算问题。度牒每三道换盐一十三袋、布八十四疋、绢三疋半、银七两二钱。

根据以上两题可以看出：度牒在南宋已成为一种纸币，和会子一样在社会上流通。

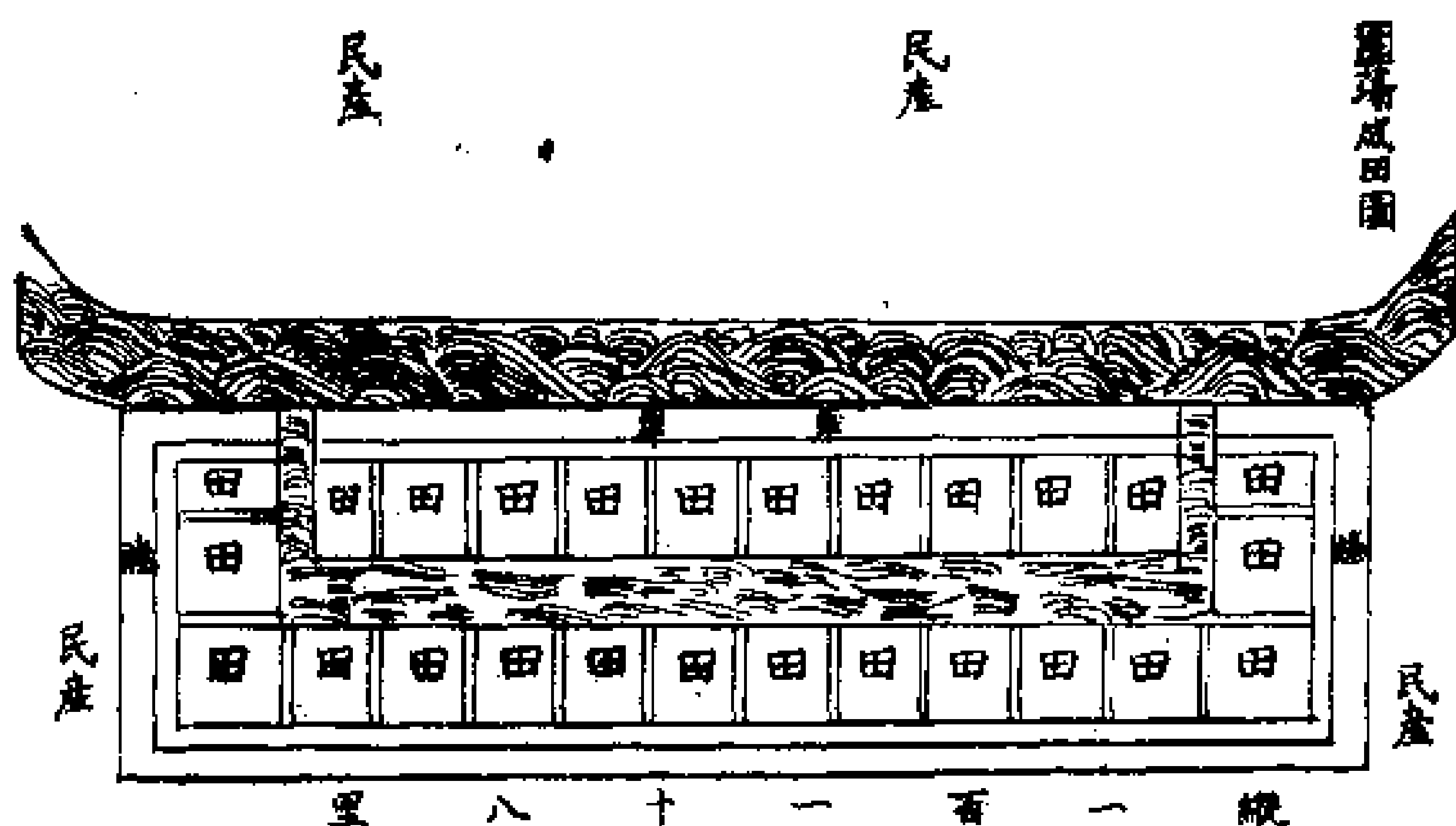
五、贸易问题。南宋时期的商业、贸易比较发达,广州、泉州、明州(今浙江宁波市)、杭州外港等都是当时重要的对外港口，出口的物品主要是丝绸、铁器、瓷器等,进口的物品主要是香货(如

沉香、乳香、檀香等)、胡椒、丁香等等。在《数书九章》中有两道题是属于贸易方面的计算问题。卷十七“推求物价”题:“问推货务三次,支物准钱各一百四十七万贯文,先拨沉香三千五百裹,玳瑁二千二百斤,乳香三百七十五套;次拨沉香二千九百七十裹,玳瑁二千一百三十斤,乳香三千五十六套四分之一;后拨沉香三千二百裹,玳瑁一千五百斤,乳香三千七百五十套,欲求沉、乳、玳瑁裹斤套各价几何。”这里讲的是从货栈(称为务或场)往外拨货物,包括沉香、乳香和玳瑁三种,这都是进口货物。本题还给出三种货物的单位名称,也是有价值的史料。

卷十七“均货推本”题所提到的货物有沉香、胡椒和象牙三种,系海舶之物。题目的开头说:“问有海舶赴务抽毕,除纳主家货物外……”,宋代有市舶务,所谓“赴务”就是海船到市舶务去交税,当时都是给实物,叫做“抽分”(也叫“抽解”)。隆兴二年(1164)两浙市舶司向南宋政府报告说:“抽解旧法,十五取一,其后十取其一。又其后择其良者,谓如犀、象,十分抽二分,又博买四分,真珠十分抽一分,又博买六分之类。舶户惧抽买数多,所贩止是杂色杂货。照得象牙、珠、犀,系细色,抽买比他货至重,非所以来远人。欲乞十分抽解一分,更不博买。”[17]得到批准。《数书九章》所谓“抽毕”就是抽分完毕的意思,但是抽多少没有指出。当时商港设有榷货、市易、平准、秤斗、都税五务,夏税物帛、杂卖、抽分三场[18],抽分有专门机构管理,为八务场之一。题中还说“有沉香五千八十八两,胡椒一万四百三十包〔包四十斤〕,象牙二百一十二合〔大小为合,斤两具等〕,系甲、乙、丙、丁四人合本博到……”,“博到”就是“博买到”,为政府按规定价格收购货物,按上引资料来看原来博买的比例很大,后来虽然“更不博买”,但是开禧元年(1205)南宋政府规定:明州等处的市舶机构,“遇蕃船回舶,乳香到岸,尽数博买,不得容令私卖。”[19]可见博买还是存在,对有些货物如乳香,要全部博买。由此可知,《数书九章》中所讲的情况应当是属实的。

六、生产与工程问题。《数书九章》中还有一批问题涉及到生产和工程，对于我们了解南宋的生产和工程技术有参考价值。

首先是关于农业生产问题。卷六“围田先计”题、卷十“围田租亩”题和“筑埂均功”题是有关围田的计算问题，头一题：“问有草荡一所，广三里，纵一百八十里，夏日水深二尺五寸，与溪面等平，溪阔一十三丈，流长一百三十五里入湖，冬日水深一尺。欲趁此时，围裹成田，……。”并有附图。宋元时代，南方的围田是比较多的，北宋科学家沈括（1030—1094）就曾记述过宁国（今安徽宁国县）地区修圩田的情形[20]。这个圩是指低洼地周围防水的堤，因此圩田与围田是一回事。又元王祯也讲过围田，指出：“围田：筑土作围以绕田也。盖江淮之间，地多薮泽，或濒水不时淹没，妨于耕种，其有力之家，度视地形，筑土作堤。”[21]《数书九章》正反映了这种情况。



“围田租亩”题“问有兴复围田已成”，计算按等收租问题，而“筑埂均功”题则是有关四个县兴筑圩埂的分工计算问题。

卷十七“菽粟互易”题讲到菽、小麦、油麻和粳米，卷十八“推

计互易"题讲到糯谷、糯米、小麦、麦曲和酝糯米，其中"油麻"是一种什么作物没有说明，也不见于他书记载。根据"小麦一斗五合易油麻八合，油麻一升二合易粳米一升八合"，可知油麻是一种最贵的作物，比小麦贵十二倍多，也比粳米贵，很可能是油料。

《数书九章》中有关工程技术的问题是多方面的，以下有选择地加以论述。

卷二"积尺寻源"题是砌基一段用四色砖问题的计算，其中特别重要的是有砖的名称和规格。题说："其四色砖：大方，方一尺三寸；小方，方一尺一寸；城砖，长一尺二寸、阔六寸、厚二寸五分；六门，长一尺、阔五寸、厚二寸。"没有直接给出"大方"和"小方"的厚度，但在"草"中又说："置四砖方、长、阔、厚，系八数"，城砖、六门各三数，共六数，再加上大方的方和小方的方，共八数，显然大方和小方都只有一数，因此是两种立方形砖。

卷七"陡岸测水"题是与造浮桥有关的问题，"问行师遇水，须计篾缆，搭造浮桥。今垂绳量陡岸，高三丈"。这里告诉了我们三个技术性问题，即①造浮桥用篾缆，就是把一些篾缆于两岸固定，然后再在篾缆上铺木板等东西。②在两岸连结篾缆之前，要先测河宽。③测河岸高度用垂绳法。

卷十三"楼橹功料"题是计算"筑城合盖楼橹"的工料问题，所涉及到的建筑材料和构件，包括不同规格的在内，有十九种之多，它们是：卧牛木、搭脑木、看濠柱、副濠柱、挂甲柱、虎蹲柱、串挂枋、仰板木、平板木、城砖、四八砖、石灰、纸觔、中板瓦、丁环、一尺钉、八寸钉、五寸钉、四寸钉。其中不少术语不见于他书，是建筑史上不可多得的资料。

此外，还有不少题涉及到生产技术和工程技术问题，如"堂皇程筑"、"砌砖计积"、"计作清台"、"计造石坝"等等都是。

如果把《数书九章》与晚出一年的李冶的《测圆海镜》(1248)作一比较是有趣的。时间虽然仅差一年，但是两书绝不相同，《测圆海镜》全书基本不涉及应用问题，因而与社会经济有关的内容可以

说是没有的。这样，《数书九章》在某程度上说是一部经济数学专著，而《测圆海镜》则是一部纯粹数学著作。《数书九章》的这一特点，早有钱宝琮注意及此[22]，笔者的这篇文章则作了进一步探讨，然而还有更深入研究的必要。

参 考 文 献

〔1〕李迪：《秦九韶传略》，载本书。
〔2〕《宋史》卷一百六十七“职官七”。
〔3〕《宋史》卷一百七十八“食货上六”。
〔4〕《宋史》卷一百六十三“职官三”。
〔5〕《宋史》卷一百七十五“食货上三”。
〔6〕吴潜：《许国公奏议》卷二。
〔7〕U.Libbrecht Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, 1973, London, p.87—88。
〔8〕白居易：《长庆集》卷四“杜陵叟”。
〔9〕林庚、冯沅君主编《中国历代诗歌选》下编（二），1979，人民文学出版社，第721页。
〔10〕《宋史》卷一百二十七“食货上二”。
〔11〕同〔6〕，卷一。
〔12〕吴 曾：《能改斋漫录》卷一“事始·和买”。
〔13〕《文献通考》卷二十“市籴”。
〔14〕朱熹：《朱文公集》卷十一“戊申封事”。
〔15〕《宋史》卷一百八十一“食货下三”。
〔16〕《续文献通考》卷七“钱币一”。
〔17〕《宋会要辑稿》“职官”四四之二七；《文献通考》卷二十“市籴一”。
〔18〕景定《建康志》卷二十三。
〔19〕《宋会要辑稿》“职官”四四之三三。
〔20〕沈括：《长兴集》卷二十一“万春圩图记”。
〔21〕王祯：《农书》卷十一。
〔22〕钱宝琮：《秦九韶〈数书九章〉研究》，《宋元数学史论文集》，1966，科学出版社，60—103。

李倍始《十三世纪中国数学》述评

白尚恕　沈康身

书名　Chinese Mathematics in the Thirteenth Century

中译名　十三世纪中国数学

作者　U. Libbrecht(李倍始)

出版　美国麻省理工学院，1973

篇幅　全书六卷，共计23+2章，31+555页。

第1卷　秦九韶与《数书九章》。列为5章，附录1章。

第2卷　《数书九章》中的数学：记数法与术语。列为1章。

第3卷　初等数学方法。列为3章。

第4卷　代数：线性方程组，行列式，数列与级数，高次方程数值解法。列为4章。

第5卷　中国剩余定理。列为9章，附录1章。

第6卷　社会与经济背景。列为1章。

本书列为美国科学与艺术研究院院士席文(N.Sivin)主编的《东亚科学丛书》第一集。

本书作者李倍始系比利时鲁文(Leuven)大学数学教授，中国科学史是其第二职业，1982年第一届中国科学史国际学术会议的东道主兼会议秘书长。

本书主要介绍和讨论秦九韶《数书九章》，但并不局限于数学，这就能更全面地理解所议主题。

本书是第一部用英文写的《数书九章》研究专书。

本书第1卷系统、全面地探讨了从《九章算术》开始直到宋元时代中国数学的一般特色、宋元时代的数学家以及他们的数学思

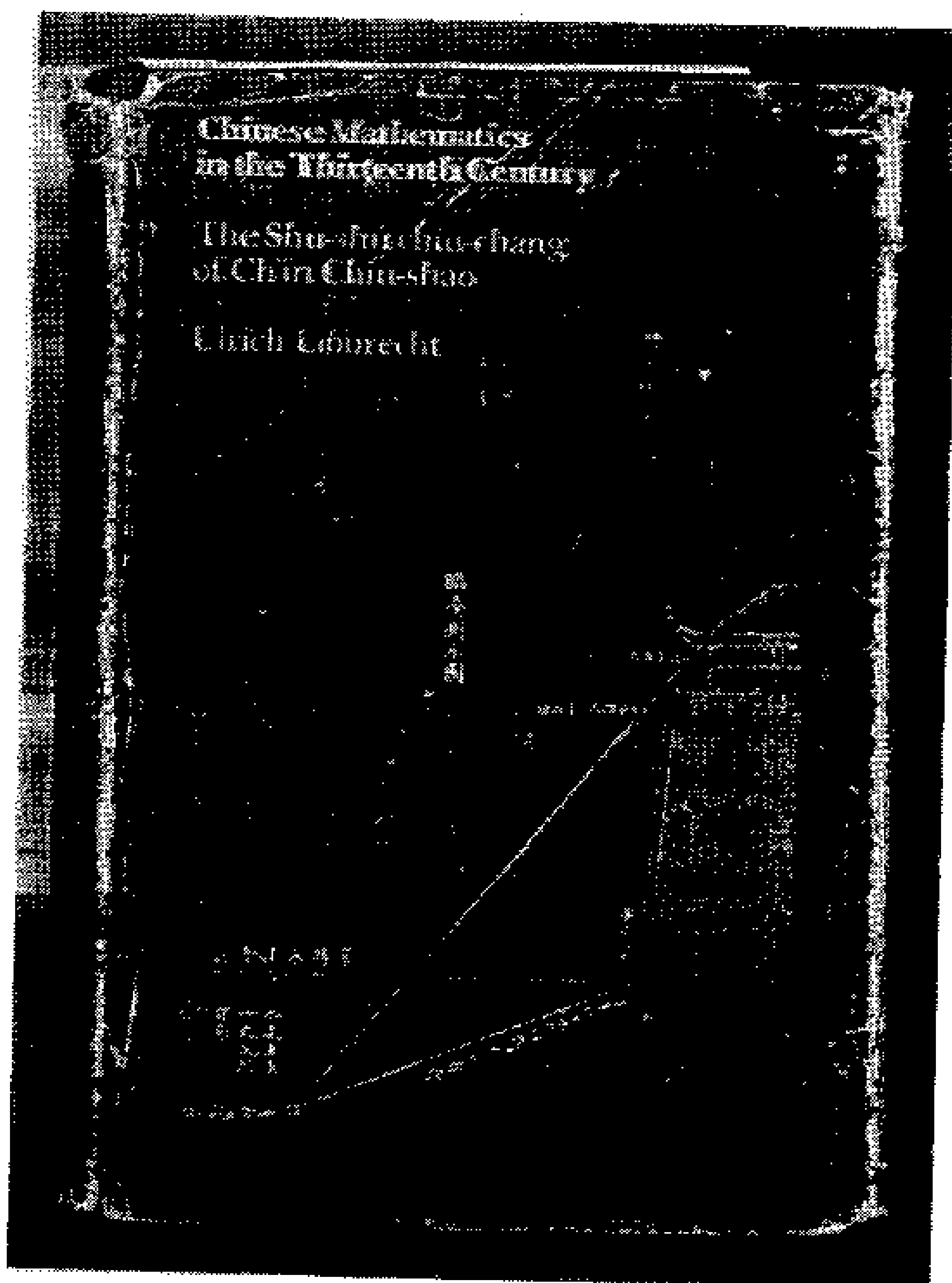


图1　李倍始著《十三世纪中国数学》书影。

想、秦九韶的一生、《数书九章》成书、版本以及历代研究历程。之后论《数书九章》结构及秦的自序、中国记数法以及度量衡制度。第2至第5卷论纯数学内容。第6卷对秦九韶所处时代的经济、社会作全面研究，范围很广泛：兼及货币、商业、运输、水利、赋役、建筑、军事、天文和气象等方面。

在第1卷第1章里，李倍始略论了秦氏的学术观点之后，便引入苏联数学史专家尤什凯维奇（А.П.Юшкевич）对中国数学的异论：

1．几乎所有中国中古时期的数学书籍都缺乏证明。

2．中国数学书籍的主要意旨是为了实际应用。

3．除了根据逻辑推理以外，许多科学成果不可能是由经验得到的。

李倍始除对第三条给以似是而非的肯定外，对于前两条未给以任何评述。事实上，在中国古算书里，不可能否认没有从经验中得来的，但也不能认为全部是由经验得到的。就以《九章算术》来说，固然有些算法是得自经验，但是，圆面积算法、圆环面积算法、羡除体积算法、刍童体积算法以及均输算法等等，若没有理论的指导，单凭经验的总结则是难以想象的。《九章算术》所载的这些算法，不仅比较繁难，而且正确无误。仅凭经验是无法得到这些繁难而正确的算法。另一方面，中国传统数学的特色之一就是寓理于算。中国数学不同于西方数学，不仅侧重于实际应用，也注重计算，对于数学理论往往蕴藏于算法之中，认为是不言自明的。所以，研讨中国数学必须从字里行间下功夫，不能只由表面做文章。

至于证明，在中国古算书原文里似不多见，但三国时代在赵爽《周髀算经注》及刘徽《九章算术注》里，有大批的证明文字。例如句股圆方图注、日高图注可作为赵爽证明文字的代表作，刘徽不仅以严密的语言给一些概念下了明确的定义，而对《九章》的许多结论都作出了严格的证明，他所采用的方法，有综合法、分析

法，有时兼及反证法。唐代李淳风对《九章》也作过注解，李注虽然创见不多，但他转述了祖暅对球积的算法，就中既有推导过程，也有证明，并介绍了刘祖原理。可见认为中国古代数学著作中缺乏证明是没有根据的。

李倍始在第2章论及《数书九章》与《九章算术》的关系：他认为宋代的数学主要源泉是《算经十书》，尤其是秦九韶在编著《数书九章》之前必然深入研究过《九章算术》，所以，《数书九章》比之《九章算术》，在选材方面较为优越，在应用方面较为广泛，在分类方面较为系统，在算法方面较为综合，在理论方面较为深透。也指出其不足之处，认为为了解决实际问题，根本用不到十次方程，这种纡回曲折的编造问题的解法给中国数学缓慢发展带来一定的影响。又指出《数书九章》偏重于代数学，而忽略了对几何学的发展。甚至可以说没有一般代数学的结构，只有很多美丽的砖，而没有富丽的建筑物。李倍始对《数书九章》还作出了中肯的评价。认为它标志着中国传统数学的顶峰。

基于此，作者总结了宋元时代中国数学在代数方面的突出成就。认为：

1． 对不定分析(中国剩余定理)，秦九韶给出一个十分精辟的解法，甚至包括提取互素模数的方法。直到18世纪欧拉及高斯时代，欧洲对这类问题没有得到解决。

2． 在秦九韶的著作中，较早地给出了高次方程的数值解法。这种解法直到19世纪初期，欧洲才明确出来。

3． 非线性方程的天元符号，即是半符号代数学，最早出现在李冶及朱世杰的著作中，这是中国数学的一大特色。

4． 贾宪三角形发现在杨辉、朱世杰的著作中，而欧洲则出现在16世纪。

5． 郭守敬、王恂所用过的三次插值公式，等价于18世纪牛顿(1711)、斯特灵(1730)的公式。

6． 在级数领域中，秦九韶、杨辉尤其朱世杰的工作都超过

了沈括的研究。

7． 郭守敬、王恂对测量学的发展，是出自沈括的会圆术。

宋元时代在代数方面的七项成果中，秦氏工作占了三项。李倍始对秦氏作出了正确而全面的评价。

其第3章论述了秦九韶的生平，并在附录里评论了周密《癸辛杂识续集》的记载。第4章、第5章分别论及《数书九章》的流传及其结构。可以看出李倍始是下了很大的工夫，对《数书九章》的版本流传及其结构作了较详尽的论述与考证。有一定参考价值。

第2至第5卷中，作者对秦九韶所议八十一个算题或详或略都有所接触和分析：主次有节，广征博引，叙述引人入胜。在第2卷第7章算术方面，李倍始首先对秦氏四种数作了解释，又对基本运算术语如“乘”、“因”、“生”、“如法而一”、“幂”、“乘方”等以及辅助运算术语“倍”、“折半”、“展为”、“等数”等作了详尽的解释，但对“奇”、“偶”的解释，似有含混不清之处。接着以推求本息题为例，对“反锥差”、“方锥差”、“蒺藜差”的配分比例进行了核算和解释。又提到：

围田租亩题是用配分比例解决的问题，但比较《九章算术》衰分章的要求有所加深和推广。

对互易推本题提出解题模式：

已知e以及$\frac{a}{b}=\frac{n_1}{m_1}$，$\frac{b}{c}=\frac{n_2}{m_2}$，$\frac{c}{d}=\frac{n_3}{m_3}$，$\frac{d}{e}=\frac{n_4}{m_4}$，其中$n_i$，$m_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$为已知数，求$a$的值。其图式为：

$$\begin{array}{ccccc} & & & n_1 & \\ & & n_2\swarrow & m_1 & \\ & n_3\swarrow & m_2\swarrow & & \\ n_4\swarrow & m_3\swarrow & & & \\ e\swarrow\ m_4\swarrow & & & & \end{array}$$

求得 $a=e\times\frac{n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot n_4}{m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdot m_4}$

这模式就是秦九韶的雁翅算法。

又提出：菽粟互易题是《九章算术》卷7的换油调漆题的推广，但在解题方法上不用盈不足术而用雁翅算法。

本章之末，又提及秦氏用算术方法计算利率的问题。

几何方面，作者在第8章对《数书九章》总结出四点特色。认为：

1. 在《数书九章》中，多处使用过中国很早就知道的毕达哥拉定理。

2. 把相似三角形性质，作为解决几何问题的基础。

3. 转引李约瑟对秦氏在平面图形面积方面工作的评述。

4. 秦氏使用过圆周率的三个近似值，但他没有使用祖冲之的密率。

在总结之后，举出尖田求积题、三斜求积题、斜荡求积题、均分梯田题、漂田推积题、环田三积题以及一些台体、楔形体作为例证进行了分析，并突出介绍了三斜求积公式，着重阐述了中国数学家把几何问题往往作为代数问题来解决，对于有关代数运算及公式一类的操作已是轻车熟路、运算自如。并认为其中所得方程、公式、算法不单纯是经验的总结。

在第9章“三角”方面讲到，之所以这样称呼，是因为中国古代使用过原始三角学的重差术。认为由数学角度来看，由相似直角三角形性质形成的重差术到引入角的函数给以特定的名称(如正弦、余弦等)未必是一个进步，因为其中的运算是等价的。但是，从另一个角度来看，中国的重差术却缺乏近代三角学所具有的特性。

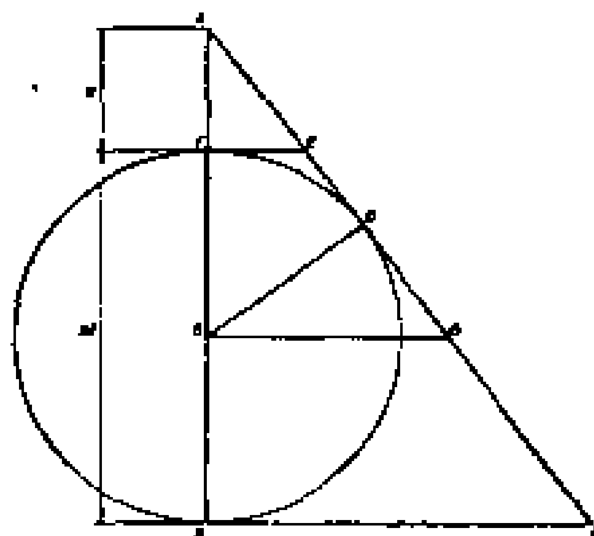


图 2

然后作者摘译了《秦九韶测望九问造术之探讨》一文，并于临台测水题下提出了个人的见解。

第4卷专门论述了《数书九章》在代数方面的成就，共分为四章。第10章论述线性方程组，第11章为行列式，第12章为数列和级数，第13章介绍高次方程数值解法。

对于线性方程组的论述，作者认为《九章算术》的解法差不多是完美无缺的，而线性方程组的表示形式和解法最早发现于中国，

方程术是中国在线性问题领域内的高度成就。作者还引用了史密斯、三上义夫、福格尔（K. Vogel，1888—1985）、尤什凯维奇等人对线性方程组的评述，并对比了《九章算术》与秦氏的成果，对推求物价题作了详尽的分析。

在第11章讲到行列式，作者认为用算筹布列的算式正好相当于数字行列式，但是在中国古代的著作中却找不到行列式概念的痕迹。可能是筹算法则激发了行列式的思想，而关孝和于1683年借助于筹算用展开行列式解线性方程组，谁也不能否认日本数学未受到中国数学的影响，中国数学对关孝和的工作也有一定功劳。李倍始还认为秦九韶对计造军衣题的解法就是行列式解法。并企图证明行列式法是得自盈不足术，于是说虽然不能认为秦九韶是克拉美（G. Cramer，1707-1752）方法的先驱者，但秦氏方法却是盈不足术的一个重要扩张，而且不可能不是行列式。

李倍始所说日本数学受到中国数学的影响，从筹算法则启发了行列式算法。我们认为这一说法是正确的，但中国古代并没有行列式的想法，而秦氏对计造军衣题的算法也非行列式，实际上是盈不足术。盈不足术是由比率算法演变而成的，并不是由解线性方程组得到的算法。李倍始的说法，似有进一步探讨的必要。

在第12章数列与级数中，李倍始从算术数列算法引出解方程，并列举均定劝分题、计造石填题、积木计余题、方变锐阵题、计布圆阵题及圆营敷布题，论述秦氏在算术数列方面的工作。

在第13章高次数字方程里，李倍始认为解高次数字方程在代数学的发展中是中国最重要的贡献之一。他引用日本数学史家三上义夫的话说，著名的高次方程数值解法是中国的重要发明，在中国使用的时间，至少比欧洲足足早6个世纪。并批驳了一些怀疑这一算法是中国发明的优先权。李倍始还指出著名科技史家李约瑟对秦氏的解法没有给出充分的历史论述，只限于《九章算术》的原始方法。然后，作者系统而较全面地论述了由贾宪、刘益、杨辉、朱世杰、李冶以及秦九韶等在这方面的成就，并认为秦九

韶虽不是这种解法的创始人，但他给出系统而明确的描述，应给以一定的名望。作者又以尖田求积题为例论述其解法步骤，解释了所用的术语，对所解方程进行了分类，举例论证了秦氏的近似根，并总结为：(1)方程是由上至下按升幂排列的竖式，但无等号。(2)解方程时是用试商的方法。(3)为了实际应用，只求方程的正根，未考虑其负解。(4)缺乏解方程一般理论的描述。(5)秦氏解法与霍纳解法在理论上、方法上完全一致。最后，作者把秦氏解法追溯到汉代，认为《九章算术》里求平方根、求立方根的方法是秦氏方法的渊源，并引用李约瑟、王铃、兰丽蓉、尤什凯维奇、福格尔的论点加以阐述。作者对秦氏方法作出了全面而系统的介绍，并给出公允、正确的评价，都是难能可贵的。

李倍始的重点工作是论述秦九韶的不定分析（解同余式组和不定方程），他的工作做得很细致。第5卷整卷在中国剩余定理的标题下，首先在第14章介绍了中国以外各国家、各地区研究一次不定分析的历史回顾，材料收集得也很全面。然后在第15章，介绍了自《九章算术》五家共井题以来直到十三世纪中国不定分析的研究历程。之后于第16章，论述明、清两代大衍求一术的工作和成果，并且把欧洲人对中国这一领域探索经过作为这一章的附录。对秦九韶在《数书九章》卷1第1题所述大衍求一术本身李倍始的处理可谓十分谨慎，在第17章里，他逐字逐句对照翻译、解释和举例。最后在第18、19、20章是大衍求一术与印度库塔卡、大衍求一术与造历、大衍求一术与现代数学三章。经过这样全面周到描绘，对英语世界读者理解中国传统数学确实带来很大方便。

象《数书九章》这样重要的书籍，自问世以后，历来引起学者们十分关切，数百年来已做过不少工作，但是其中仍有空白。李倍始并不满足于因循旧说，他对于某些题，特别是那些空白① 能善于

① 例如《数书九章》卷9复邑修赋、卷14计作清台、堂皇程筑，卷16圜营敷布、计造军衣，卷17互易推本、菽粟互易，卷18推计互易、推求本息、推求典本等题过去没有人提出过有关研究论著。

独立思考提出新见，这很难能可贵。对《数书九章》立术或答案有误，他能发现并正误，还提出中肯的见解。

李倍始还提出：

筹算对当时来讲是一种方便的运算工具。秦氏书中所列的为数众多的图式，是运算过程的记录，运算本身是方便的，记录下来倒反是一件够麻烦的事。

《数书九章》是《九章算术》的发展，书中八十一道题难度加大，水平提高，有些内容又是前所未有。这些话是李倍始在经过充分比较后得出的正确结论。

李倍始在第21章用大量可靠材料对秦九韶关于大衍求一术的发明作出客观分析，他由浅入深地对一次同余式组解法提出十种高度：

1. 提出问题、附特解，未述解法。
2. 零散设题，算法限于一些特殊数据。
3. 限于一套数据的某种算法。
4. 限于特例的证明。
5. 两两互素模的一般算法，未解。
6. 两两互素模的一般算法，有解。
7. 两两不互素模的一般算法，未证。
8. 两两不互素模的一般算法，并给出有解的条件。
9. 给出 5 的证明。
10. 给出 7 的证明。

按十种高度列表如下：

从这十个高度的比较，李倍始排了工作质量的名次。

斯提尔吉斯，欧拉/高斯，秦九韶，贝维立基，哥廷根手稿，休顿、慕尼黑手稿，斐波那契、杨辉、《孙子算经》、阿古洛斯、程大位、严恭、玉山若干。

秦九韶名列第三，但李倍始说："考虑到秦九韶所处的时代，那么，著名科学史家萨顿(G. Sarton) 对秦的赞扬并不为过：'对

数学家(事件)	年代	十种高度									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
《孙子算经》	约400?	V	V								
斐波那契Leonardo Fibonacci	1202	V	V	V							
秦九韶	1247	V	V	V		V	V	V	V		
杨　辉	1275	V	V	V							
阿古洛斯(I.Argyros)	约1350	V	V								
严　恭	1372	V									
慕尼黑手稿	约1450	V	V	V	V	?					
玉山若干(Rogiomontanus)	约1460	V	?								
哥廷根手稿	约1550	V	V	V	V	V	V	V			
程大位	1592	V	V								
休　顿(V.Schooten)	1657	V	V	V		V					
贝维立基(Beveridge)	1669	V	V	V	V	V				V	
欧拉(L.Euler)	1743	V	V	V	V	V	V			V	
高斯(F.C.Gauss)	1801	V	V	V	V	V	V			V	
斯提尔吉斯(Stieltjes)	1890	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V

他那个民族、对他那个时代、甚至对所有时代，秦九韶是中国最大数学家之一。’”

有些学者认为大衍求一术源出印度库塔卡，李俨始为澄清事实真相，他提出鉴定的几点看法①，经过认真比较作出令人折服的结论：“我们不能接受中国大衍求一术与印度库塔卡有任何历史渊源关系”。

① 见本书“库塔卡与大衍求一术”一文。

李倍始的治学态度是谦恭的，凡是他引用过的文献都不厌其烦，一一注明出处，不以人之功为己功。并且他一再强调近年来国际上对中国数学史的研究事业蒸蒸日上，如果没有中国学者先走一步，这种进步是不可能取得的。他还推崇钱宝琮先生在《宋元数学史论文集》中有关论述，他说如果没有这些出色的论著帮助，他这部书是不可能出版的。

在第6卷第23章里，作者介绍了南宋的社会经济情况，之后作者从南宋的财政制度、金钱流通、货币兑换、信用贷款、商业生活、国际贸易、商务管理、建筑规格、征收租税等方面对《数书九章》作了全面的分析。

当然李倍始的工作也有欠缺之处，例如在解释宋代数学时，过多使用现代数学工具，这就显得有强加古人之处。例如围田租亩题，原题术文用的是衰分术，而作者却列出三元方程

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{y}{z}=\dfrac{1}{3} \\ x+y+z=72516255 \end{cases}$$

又如均货推本题，原题术文及演草排出矩阵，显然用我国传统的方程术即今矩阵初等变换法解题，而李倍始却列出为数众多、用x、y表示的线性方程，这是中国过去从没有使用过的。

对中国数学史实的理解也有出入处，例如在秦九韶之前对算术级数术和公式各参数互求问题早有考虑，不能说这些是秦九韶的创见。

总上所述，李倍始的工作虽然有些不足之处，但我们认为《十三世纪中国数学》一书仍不失为一部可信而有价值的好书。

附录：　　秦九韶与《数书九章》研究论文目录

本"目录"所收，仅限于1900年以来已经发表的、直接与秦九韶和《数书九章》有关的论文题目，包括作者、所载刊物、卷期、年月和页数。外文有关论文极少，故这里只列中文目录(实际上也不多)。为检索方便起见，各按发表时间的先后编排。由于我们掌握的资料有限，目录中肯定会有遗漏，甚至可能有错误，望国内外同行给予指正或补充。

大衍术论　　高均　工科杂志(震旦大学院)1920年2号；第7-64页。

大衍术　　傅种孙　北京高师数理杂志1920年3期。

求一术源流考　　钱宝琮；学艺；三卷四号(1921年8月)；第1-16页；收入钱宝琮《古算考源》(1933)，又收入《钱宝琮科学史论选集》(1983)。

大衍求一术之过去与未来　　李俨；学艺；七卷2号(1925年9月)；第1-45页；收入李俨《中算史论丛》第1集(1954)。

物不知总之普遍算法　　敖文宗、李俨；科学；15卷9期(1931年9月)；第1399-1413页。

韩信点兵　　(刘)熏宇；中学生；30期(1932年12月)；第95-125页。

韩信点兵　　金品；科学；17卷3期(1933年3月)；第358-378页。

四库提要《数书九章》撰人秦九韶补考　　心史天津益世报；1936年12月17日。

韩信点兵公式　　冷观　数学杂志；2卷1期(1939年11月)；第55-64页。

宋元算书与信用货币史料　　严敦杰；益世报；1943年7月29日。

宋元算学丛考　　严敦杰；科学；29卷4期(1947年4月)；第109-114页。

韩信点兵　　钱宝琮；上海大公报；1951年3月16日。

海伦-秦九韶公式　　燕霞；数学通报；1955年3月号；收入《初等数学史》(1958)。

谈宋代大数学家秦九韶　　姚家超；天津日报；1957年6月3日。

增乘开方法的历史发展　　钱宝琮；科学史集刊；2期(1959)；第126-143页；收入《宋元数学史论文集》(1966)。

"海伦公式"的历史　　李迪；数学通报；1962年7月号；第42-43页。

秦九韶雨深雪厚例解的讨论　　程廷熙；数学通报；1963年1月号。

秦九韶《数书九章》研究　　钱宝琮；宋元数学史论文集，1966。第60-103页。
宋金元历法中的数学知识　　严敦杰；同上；第210-224页。
宋元时期数学与道学的关系　　钱宝琮；同上；第225-240页。
秦九韶测望九问造术之探讨　　白尚恕；同上；第290-303页。
中国剩余定理　　李文林、袁向东；中国古代科技成就，1978；第110-121页。
三斜求积　　潘有发；数学研究(哈尔滨)；1980年6期。
更相减损术源流　　沈康身；自然科学史研究，1卷3期(1982)，第193-207页；收入《〈九章算术〉与刘徽》(1982)。
中国古代不定分析若干问题探讨　李文林、袁向东；科技史文集第8辑数学史专辑(1982)，第106-122页。
学习《数书九章》札记二则　　郭书春；同上；第123-127页。
《数书九章》中的几何问题　　鲁又文；数学通报，1986年6月号。
《数书九章》"计浚河渠"题分析　　白尚恕；数学通报，1986年6月号。
《数书九章》大衍类算题中的数论命题　　沈康身；杭州大学学报(自然科学版)13卷4期(1986年10月)；第421-434页。

Chinese Traditional Mathematics Series No. 2

Qin Jiushao and His 《Mathematical Treatise in Nine Chapters》

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix:

Appendix: